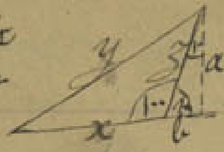
$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2$

$c = a - bi$

$(a+bi)(a-bi) = a^2 - abi + abi - \ldots$



سطح مثلث و زاویه
مجموع اضلاع
[illegible]
از اضلاع را تعیین
نمائیم

$z = \frac{a}{\sin 80}$ $b = a \tan 10$ $a = b \cot 10$

$\frac{ax}{2} = 12$ $x = \frac{24}{a}$

$x + y + z = 36$ $y = 36 - x - z$

$x^2 + z^2 + 2xb = y^2$ $y^2 = 1296 + x^2 + z^2 - 72x - 72z + 2xz$

$$y^2 = \left(\frac{24}{a}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sin 80}\right)^2 + \frac{48}{a} \times a \tan 10$$

$$y^2 = 1296 + \left(\frac{24}{a}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sin 80}\right)^2 + \frac{48}{a} \times \frac{a}{\sin 80} - \frac{72 \times 24}{a} - \frac{72 \times a}{\sin 80}$$

$$\left(\frac{24}{a}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sin 80}\right)^2 + 48 \tan 10 = 1296 + \left(\frac{24}{a}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sin 80}\right)^2 + \frac{48}{\sin 80} - \frac{72 \times 24}{a} - \frac{72a}{\sin 80}$$

$$48 \tan 10 = 1296 + \frac{48}{\sin 80} - \frac{72 \times 24}{a} - \frac{72a}{\sin 80}$$

$$a \times 48 \tan 10 = 1296a + \frac{48a}{\sin 80} - 72 \times 24 - \frac{72a^2}{\sin 80}$$

$$a \times 48 \times \sin 80 \times \tan 10 = 1296a \times \sin 80 + 48a - 72 \times 24 \times \sin 80 - 72a^2$$

$$8{,}33377152a = 1276{,}3008a + 48a - 72 \times 24 \times \sin 80 - 72a^2$$

$$a^2 - \frac{1315{,}9670848a}{72} = -24 \times \sin 80 = -23{,}3652$$

$$\sqrt{a^2 - \frac{1316a}{72} + \left(\frac{658}{72}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{658}{72}\right)^2 - 23{,}3652} = \frac{557{,}26}{72}$$

$$a - \frac{658}{72} = \frac{557{,}26}{72} \qquad a = \frac{557}{72} + \frac{658}{72} = \frac{1215}{72} = 16{,}875$$

$$x = \frac{24}{a} = 24 : 16{,}875 = 1{,}422$$

$$z = \frac{a}{\sin 80} = 16{,}875 : 0{,}9841 = 17{,}135$$

$$y = 36 - x - z = 36 - 17{,}135 - 1{,}422 = 17{,}443$$

ضلع مخروط	عدد گلوله‌های مخروط	تفاوت مخروطها	تفاوت تفاوت
۱	۱		
۲	۴	۳	
۳	۱۰	۶	۴
۴	۲۰	۱۰	۵
۵	۳۵	۱۵	۶
۶	۵۶	۲۱	۷
۷	۸۴	۲۸	۸
۸	۱۲۰	۳۶	۹
۹	۱۶۵	۴۵	۱۰
۱۰	۲۲۰	۵۵	۱۱
۱۱	۲۸۶	۶۶	۱۲
۱۲	۳۶۴	۷۸	[illegible]

قاعده تجسس نوشتن تو حسابکه در آن جمیع گلوله‌های شکل مخروط که از قاعده آنها را
از یک تا هر قدر که خواسته باشیم بگذاریم در این نوع جدول اول شامل است
ضلع قاعده مخروط‌ها را و جدول دوم عدد گلوله‌های تمام مخروط را و جدول سیم تفاوت مخروط
از ما بعد خود نشان و جدول چهارم تفاوت تفاوتهای را پس از آن تعیین عدد گلوله‌های ترتیب
شکل مخروط را که قاعده آن از واحد باشد تا هفت بقاعده مذکوره در کتاب
حساب [illegible] کنیم تفاوت مخروطها و تفاوت تفاوتها را [illegible] که تفاوت تفاوت
اعداد متوالیه [illegible] چنانچه شده است ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ملاحظه
میشود که پس از جمع کردن تفاوت تفاوت با تفاوت تفاوت مابعد
حاصل میشود چنانچه ۶=۳+۳ و ۱۰=۴+۶ و ۱۵=۵+۱۰ و
۲۱=۱۵+۶ و همچنین و از جمع کردن تفاوت با عدد مخروط اول
جمع مخروط [illegible] و از جمع کردن تفاوت ثانی با مخروط ثانی مخروط سیم و همچنین
حاصل میشود پس از نوشتن عدد مخروط این قاعده بدست می‌آید که [illegible] قاعده
پیدا میکنیم گلوله‌های مخروطها را تا هر قدر که خواسته باشیم مثلاً اگر ضلع مخروط ۸ باشد میگوئیم
۸ که در جدول چهارم است علاوه ۲۸ که در جدول سیم است مساویست ۳۶ یعنی جمع کردن این
۳۶ با عدد گلوله‌های مخروطیکه قاعده اش ۷ باشد ۱۲۰ حاصل میشود که این عدد مساویست عدد گلوله‌های
مخروطیکه ضلع او ۸ باشد و همچنین میگوئیم ۴۵=۹+۳۶ و ۱۶۵=۱۲۰+۴۵ که ۱۶۵ عدد گلوله‌های مخروطی میشود
که ضلع او ۹ باشد و ۵۵=۱۰+۴۵ و ۲۲۰=۵۵+۱۶۵ و ۶۶=۱۱+۵۵ و ۲۸۶=۶۶+۲۲۰
و هکذا

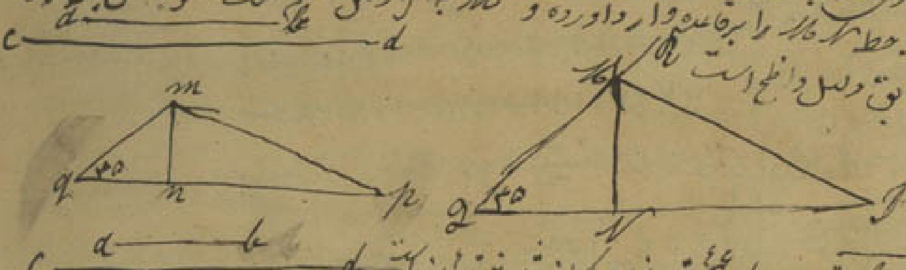
۱	۱		
۲	۵	۴	۵
۳	۱۴	۹	۷
۴	۳۰	۱۶	۹
۵	۵۵	۲۵	۱۱
۶	۹۱	۳۶	۱۳
۷	۱۴۰	۴۹	۱۵
۸	۲۰۴	۶۴	۱۷
۹	۲۸۵	۸۱	۱۹
[illegible]	۳۸۵	۱۰۰	

در مخروطهای مربع القاعده نیز بقاعده گفته شده سابق
عمل میکنیم تفاوتیکه هر سر است که در آنجا تفاوت تفاوت
اعداد متوالیه بود در اینجا بدو بالا میرود مثل ۵ و ۷ و ۹ و غیره

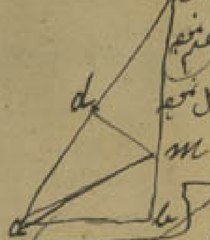
یک مخروط مثلث القاعده میخواهیم بکشیم که مکعب کوه آن ۳۶۹۷ است حال ضلع قاعده آن چه قدر میشود عمق ... ماند.
پس ضلع قاعده ۲۷ و الحر... ماند ۴۳
جواب $n = \sqrt[3]{3697 \times 6} = 27$

در یک مثلث قاعده و مجموع مقدار دو ضلع دیگر و مقدار خطیکه از زاویه رأسی بر منتصف قاعده او اخراج شده است داده شده
حال مطلوب شد اضلاع مثلث را ... جواب

در مثلث مجموع دو ضلع دیگر داده شده است میخواهیم یک مثلث قائم الزاویه حاصل کنیم که ... خط ab ... و مجموع ضلعین ... دیگر
cd باشد جواب فرض میکنیم مثلث qmn ... مثلث خواسته شده باشد قاعده او را از سمت نقطه n استداد
داده مساوی mn نموده نقطه q را بنقطه m وصل مینمائیم مثلث ... qmn حاصل میشود پس ... مثلث
خواسته شده باید قاعده اش ... موافق p و q و مساوی cd باشد بهر قسم عمل مینمائیم قاعده cd را گرفته بعد نصف
مساوی Q P نموده در نقطه Q زاویه ۴۵ درجه احداث نموده ضلع QM را میگیریم بعد
مساوی ab باشد از نقطه P قوس احداث مینمائیم که با خط QM در نقطه M تقاطع ... از نقطه
M خط MN را بر قاعده وارد آورده و M به P وصل نمائیم مثلث مطلوب حاصل میشود ...
سابق دلیل واضح است



... ab قاعده و cd مجموع وتر و ضلع دیگر از مثلث قائم الزاویه است
میخواهیم مثلث را حاصل کنیم جواب ab را کشیده و c عمود ... ساوی cd ... بعد
عمود وارده آورده نقطه c را به a وصل نموده ac را ... ساوی ...
از نقطه d عمود احداث کنیم تا با نقطه m ... تقاطع کند نقطه m را به a وصل نموده
مثلثین متساویین adm و dmc حاصل میشود پس am مساوی mc
و am ... و mb ... cb ...



خط ab و نقطه d داده شده است میخواهیم از نقطه d خطی بکشیم که دو خط متوازی را قطع کند ...
و ... خط a ... جواب ... خط a ... متوازی ...
... از نقطه d خط متوازی ... مقصود حاصل میشود



در میانه زاویه ... نقطه d داده شده است میخواهیم خطی بکشیم که به نقطه d ... یک مثلث
جواب به نصف قطر cd قوس mn را کشیده نقطه m را بنقطه n وصل نموده
خط pq را متوازی کشیده مثلث متساوی الساقین peq حاصل میشود

یک شخص در یک وقت در محیط ... فاصلهٔ ... از یکدیگر ۶۴۷ ذرع بود زاویهٔ ارتفاع یک طایری که در هوا بود گرفته شد یکی ۴۲ ۱۹
و دیگری ۳۱ ۶۰ بود حال میخواهیم ارتفاع حقیقه آن طایر را از سطح زمین معین نمائیم

شخص خواست ارتفاع کوهی را معلوم کند از پای آن کوه قدری دور تر زاویهٔ ارتفاع سر آن کوه را گرفته ۳۵ ۴۸ بود و بقدر
۱۸۰ ذرع دور تر ایضاً زاویهٔ ارتفاع را گرفته مساوی ۳۹ بود حال ارتفاع آن کوه چه قدر است

شخص میخواهد ارتفاع کوهی را معلوم نماید قدری دور تر از پای کوه زاویهٔ ارتفاع ۹ ... ۳۵ و ۲۰۰ ذرع دور تر زاویهٔ ارتفاع
۴۲ ۳۳ شد ارتفاع کوه چه قدر خواهد بود

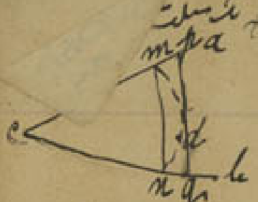
دو شخص ... فاصله ... از یکدیگر ۴۵۰ ... در یک وقت زاویهٔ ارتفاع یک بلندی را گرفته ۴۵ ۳۹ معین نموده
و دیگری ۵۶ ۳۲ حال ارتفاع بلندی از سطح زمین چه قدر خواهد شد

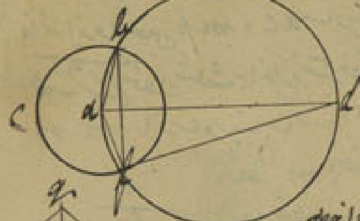
در یک مثلث مختلف الاضلاع مجموع دو ضلع معلوم و یک ضلع با یک زاویهٔ واقعه در روی ضلع معلوم معین است میخواهیم ضلعهای دیگر
به تنهائی و دو زاویهٔ دیگر را مشخص نمائیم ... فرض میکنیم ضلع و زاویهٔ معلومه a و ... باشند
... مجموع دو ضلع دیگر ... از دو ضلع x و دیگری $b - x$ میشود



$$x^2 = a^2 + (b-x)^2 - 2a(b-x)\cos\alpha$$

... حاصل میشود
... ارتفاع مثلث را بگیریم ... معین میشود

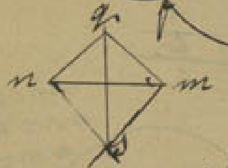




میخواهیم پیدا نمائیم قطری را که مساوی قطر کره داده شده abdf باشد

جواب دو نقطه از سطح کره که بخواهیم بفاصله معین نشان میکنیم مثل نقاط

a و b فرض میکنیم نقطه a را قطب کرده و رسم نمائیم به بعد ab در سطح کره



دایره bcf را و رسم میکنیم مثلث mnq را بطوریکه mn

مساوی باشد قطر دایره bcf را که طریق پیدا کردن او ذکر خواهد شد و هر یک از ضلعین

mq و nq مساوی باشند ab را و بعد میکنیم بر هر یک از نقاط

m و n از خطین mq و nq عمودی اخراج و امتداد میدهیم تا در نقطه s تلاقی کنند

و وصل میکنیم s را به q خط sq قطر کره مفروضه میشود برهان بجهت اینکه هرگاه اخراج نمائیم سطحیکه مرور نماید

بنقطتین a و b و بمرکز کره حادث میشود دایره abdf از دوایر عظیمه و اخراج میکنیم در او قطر ad را و او قطر کره است

و وصل میکنیم af و fd و bf را چونکه ab و af متساویند و مساویند mq و nq را و bf

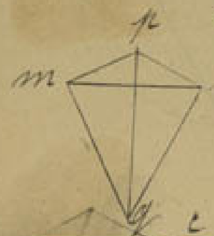
قطر دایره bcf است و مساویست mn را و زاویه abf که مساویست بزاویه adf مساویست زاویه

mqn الخ را که مساویست بزاویه qsn پس در مثلثین adf و qsn زاویتین adf و qsn و

زاویتین afd و qns قائمه اند و ضلعین af و qn بر هم مساویند

پس ضلعین ad و sq مساوی میشوند لهذا sq قطر کره مطلوب میشود

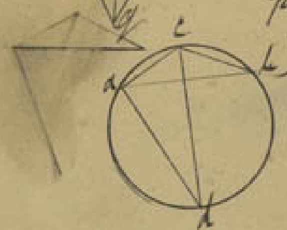
بجهت پیدا کردن قطر دایره که در روی کره کشیده میشود بغیر قسم عمل میشود که ۳ نقطه در روی محیط دایره واقعه در روی کره



معین نموده و به بعد این ۳ نقطه مثلث pmn را در روی کاغذ رسم کرده و عمودین mq و nq

در m و n را با اضلاع pm و pn وارد آورده و امتداد میدهیم تا باهم تقاطع

نمایند نقطه تقاطع را به نقطه راس مثلث وصل کرده pq مساوی قطر دایره میشود



دلیل زیرا که مثلث pmn مساویست مثلث abc را و زاویه pmn

مساویست زاویه abc را که مساویست بزاویه adc و چون زاویه pmq

مساویست pnq را زیرا که هر ذوار بعه اضلاع که دو زاویه مقابل آن باهم مساوی باشند

داخل میشود در دایره لهذا این ذوار بعه اضلاع زاویتین متقابلتین pmq و pnq

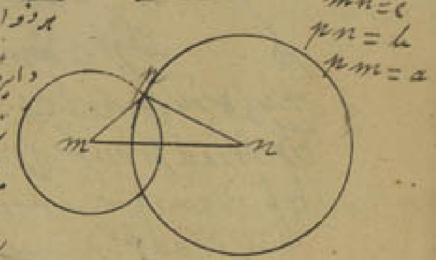
متساویند لهذا زاویتین pqm و pnm واقع میشوند بیک قوس را

و مساوی میشوند پس زاویه mqp مساوی میشود زاویه adc را

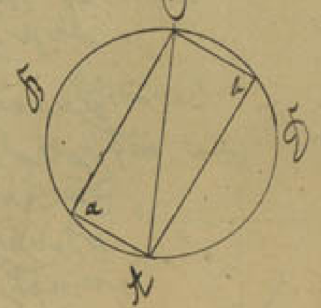
و از بیت اینکه در مثلثین adc و pqm زاویتین d و q مساویند و زاویتین a و m
قائمه اند و ضلعین mp و ac مساویند لهذا مثلثین متساویند و pq مساوی dc میگردد که قطر دایره است

عمل مثلث به اندازهٔ سه خط داده شده باین قسم عمل مینمائیم خط اطول را که c باشد کشیده
nm را که مساوی c است کشیده از نقطهٔ n به نصف قطری که مساوی b باشد دایره طرح کرده و همچنین
از نقطهٔ m به نصف قطری که مساوی a باشد دایره کشیده نقطهٔ تقاطع را که p فرض نمائیم
باشد به نقطتین m و n وصل کنیم مثلث nmp حاصل میشود که مطلوب بود





هر ذوار بعة الاضلاعی را که هر زاویهٔ مقابل آن قائمه باشد لازم می آید که اگر
دایره بدور او طرح شود چهار نقطهٔ راس ذوار بعة الاضلاع احاطه کند محیط دایره
زیرا که هر زاویهٔ قائمه را لازم است که در بر داشته باشد یک نصف دایره
مثلاً زاویهٔ a در بر دارد نصف دایرهٔ c d b را و زاویهٔ d نصف دایرهٔ
c a b را و قاعدهٔ کشیدن دایره این قسم است که دیاگونال مقابل
زاویتین قائمتین را نصف نموده و نقطهٔ مرکز حاصل شود و نصف
قطر دایره مساوی نصف دیاگونال میشود





هو

کتاب علم مساحت [illegible]

بسم الله الرحمن الرحیم

لک الحمد یا ذا المجد والجود والعلی تبارکت تعطی
ما تشاء و تمنع حمدی که معتکفان دایرهٔ افلاک از تصویر
آن قاصر است و مقیمان کرهٔ خاک از تقریرش عاجز خاصه
معبودی را است که سیاحان بحر محیط و سیاحان ارض
بسیط را خلعت جود و کسوت وجود ارزانی داشته و
بقدرت جمیل و حکمت جزیل قامت استعداد هر فردی از افراد
ممکنات و هر نوعی از انواع تعینات را بزیب تحمید و زینت

بتحمید

تمجید برافراشته الا له الامر والخلق فتبارک الله احسن الخالقین
و صلوات بی قیاس بر روان منور خواجهٔ نبیل خاتم رسل
محمد المصطفی علیه الاف الثناء و وصیه الجلیل و خلیله النبیل
علی ابن ابی طالب صلوات الله و سلامه علیه و اولاد امجاد
و پیشوایان راه رشاد باد اما بعد این رسالهٔ ایست
در علم مساحت و مشتمل است بر چند باب و هر بابی
بر چند فصل

فصل اول مقدمه (۱) کم متصل عبارت است
از کمیتی که اجزاء آن بیکدیگر ملصق باشند و از برای آن
اجزاء حد مخصوص نباشد و علمی که در او بحث میشود از تشخیص
این کمیات و اندازهٔ آنها آن علم را علم مساحت می نامند

کمیات متصله منقسم اند به ۳ قسمت اصلی که عبارت از اجسام

و سطوح و خطوط باشند جسم باصطلاح ریاضی آن را گویند که

حاوی ابعاد ثلاثه باشند یعنی طول و عرض و عمق یا قطر داشته

باشند مثل شکل اول که آن را مکعب می نامند مشهاالیه

هر جسم را سطح میگویند و سطح آنست که آن را طول و عرض

باشد و عمق نباشد مثل شکل A B C D

و C D E F و مشهاالیه هر سطحی را

خط گویند و خط آنست که آن را عرض و عمق نباشد و همان

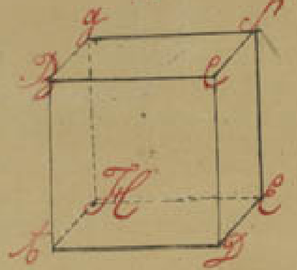
طول فقط باشد مثل خط A B و D E

و G F وغیره مشهاالیه خط را نقطه گویند و نقطه

هیچ یک از ابعاد ثلاثه ندارد یعنی طول و عرض و عمق از برای

آن نیست مثل نقات B E و A وغیره نقاط

(شکل ۱) شکل اول



خطوط

و خطوط هندسی را هرگز بحس نمیتوان محسوس نمود

باید معلوم که آنها را نمیتوان بنظر درآورد و لیکن بخیال میتوان

تصور نمود

(۲) اگر بخیال تصور کنند که نقطه بحرکت درآید و راهی طی کند

بدیهی است که بواسطه نداشتن نقطه هیچ یک از ابعاد ثلاثه را

راهی را که طی میکند جز طول بعد دیگری نخواهد داشت باید معلوم که جز

خط چیز دیگری نخواهد شد اگر بخیال فرض کنیم که خط A D بطرفی

که غیر از سمت امتدادش باشد بحرکت درآید بدیهی است

که جای حرکت او دو بعد بهم میرساند که یکی طول باشد و دیگری

عرض یعنی از حرکت او سطحی حاصل میشود و اگر بخیال فرض کنیم که سطح

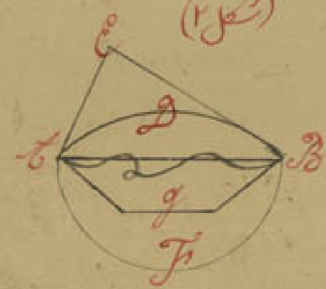
A B C D بخلاف گستردگی خود بحرکت درآید مثلا

تا H G F E حرکت کند محل حرکت او جسم

الجاد ثلاثه میشود یعنی جسم از این حرکت حاصل میگردد

(۳) وقتیکه یک نقطه بحرکت درآمد و راه بطور استقامت
و بدون انحراف از سمتی طی کرد آنخط که حاصل میشود خط
مستقیم گویند و آنخط نزدیکترین راهیست از نقطه بنقطه
ولاکن وقتیکه یکنقطه بحرکت درآید و سمت حرکت او در راه
تغییر یابد خطی که حاصل میشود خط منحنی گویند پس خط مستقیم
خطی است که همه اجزاء او امتدادشان بیک سمت است
و خطیکه هریک از اجزاء او امتدادش بسمتی دیگر است آنرا
خط منحنی گویند

(شکل ۲)



(۴) (شکل دویم) خط مستقیم B C نزدیکترین
راهیست از نقطه C بنقطه B پس از نقطه
بنقطه نمیتوان کشید مگر یکخط مستقیم ولاکن از نقطه بنقطه

میتوان

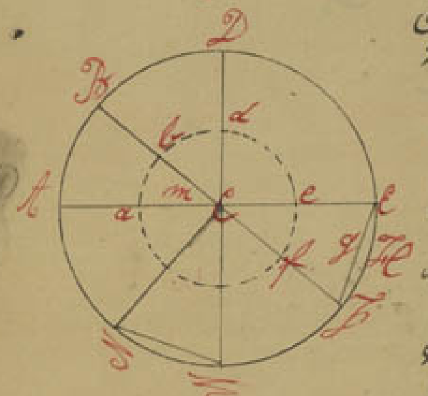
میتوان الا غیر النهایه خطوط کشید که کلاً منحنی باشند یا
مرکب باشند از خطوط مستقیم مثل خط B D A
و B م A و B C A ۲

(۵) اگر در سطحی خط مستقیم بکشند و کل اجزاء
آنخط مستقیم در آنسطح جا بگیرد آن سطح را سطح مستوی
گویند

(۶) (شکل سیم) وقتیکه یکخط مستقیم C A
بدور نقطه C بحرکت درآید تا آنکه باز دوباره بنقطه A
برسد یکخط منحنی A E C م D B A حاصل میشود
که فاصله هریک از نقطهای آنخط از نقطه C باهم مساوی
میشوند و سطحیکه در میان این خط منحنی مندرج میشود
آنرا سطح مدور یا دایره میگویند و آنخط را محیط آنسطح مینامند

۲ در اینجا باید ملاحظه نمود که هریک از این خطوط
منحنی بلندتر و بزرگترند از خط مستقیم A B

(شکل ۳)



و هر یک از قسمتهای این خط منحنی را که عبارت از
ح ک ط ، ک ط ل و م ح وغیره باشند قوس مینامند
و هر خط مستقیم که از یکنقطهٔ قوس بنقطهٔ دیگر آن
منتهی شده باشد مثل خط ح ک ، ک ل آن خط را وتر
نامند و هر وتری که از مرکز بگذرد آنرا قطر یا محور خوانند
و هر خطیکه از مرکز بمحیط منتهی شود آنرا نصف قطر
نامند و هر پارچه از محیط را که بیک قوس و دو
نصف قطر محدود باشد آنرا اقطاع دایره گویند
(۱۳) از این تعریفاتیکه از برای دایره و خطوط آن شد
معلوم میشود که همهٔ نصف قطرهای یکدایره باهم مساویند
زیرا که همهٔ آنها را فاصله از مرکز تا محیط بیک اندازه است
و بدیهی است که همهٔ قطرهای یکدایره باهم مساویند زیرا که

هر یک

هر یک از آنها مرکب‌اند از دو نصف قطر مساوی با یکدیگر
و همچنین در یک دایره وترهای مساوی تقاطع میکنند با قوسهای
مساوی چنانچه در شکل ۳ ملاحظه میشود که اگر خیال فرض
کنیم که وتر ح ک م مساوی است بوتر ک ل
و واضح است که هر قطر دایره را بدو قسمت مساوی تقسیم
میکند
(۸) در علوم متعارفه اگر کمیتی را بر روی کمیت دیگری
بگذارند بطوریکه کل اجزای کمیت اول جمیع اجزای کمیت
ثانی را بپوشانند و چیزی زیاد نماند آندو کمیت باهم مساوی
هستند و همچنین دو کمیت که باهم مساویند اگر بر روی هم گذاشته
شوند جمیع اجزای کمیت زیرین را کمیت بالائی میپوشاند
و از دو نقطهٔ داده شده میتوان یک خط مستقیم کشید و از این

یعنی قوس ح ط ع مساوی است
بقوس ک ل م

و نقطه آن خط را بقدر دلخواه می توان امتداد داد از هر نقطه داده
شده می توان باهر نصف قطری که بخواهند یکدایره کشید باید علوم
متعارفه باید علوم متعارفه که در حساب گفته شده است
ملحق نمود تا در علم هندسه بواسطه آنها چیزهای را ثابت حقیقت
دار دیگر معلوم شود

(۹) محیط هر دایره را منقسم کرده اند بسیصد و شصت قسمت
ساوی مابین هم و هر یک از آن قسمتها را یکدرجه نامیده اند
یعنی بسیصد و شصت درجه قسمت کرده اند و هر درجه را بشصت
دقیقه و هر دقیقه را بشصت ثانیه قسمت کرده اند و همچنین
و از برای درجه و دقیقه و ثانیه علامتی در نوشتجات هندسی قرار
گذاشته اند و آنها اینند (٥) درجه (۱) دقیقه (۱۱) ثانیه مثلا
اگر بخواهند بنویسند یکقوس شصت و پنج درجه و سی و پنج دقیقه

و چهل

و چهل ثانیه باین قسم مینویسند (۶۵)° و (۳۵)' و (۴۰)''
مقدار درجه یکقوس بما اندازه درستی طول آن قوس را
نمیدهد ولاکن نسبت آن قوس را با تمام دایره آن قوس بما
معلوم میکند مثلا اگر بگوییم قوس ab ساوی است
بشصت درجه معلوم میشود که نسبت آن قوس با تمام دایره
مثل نسبت شصت است بسیصد و شصت باین معنی که قوس

$$aBeJa = \frac{1}{6}\,aBeJa = \frac{60 \times aBeJa}{360} = aB$$

یعنی ساوی است بسدس قسمت آن دایره بتمامه
(۱۰) گشادگی که از تقاطع دو خط مستقیم
بهم میرسد آنرا زاویه گویند مثلا از تقاطع ع ه و ع ط
در نقطه ع خطهای ع ه و ع ط دو ضلع زاویه اند
و نقطه ع نقطه راس زاویه است یکزاویه را با سه حرف

کنند

تلفظ میکنند یا بیک حرف اگر به حرف تلفظ حرفیکه در راس
زاویه نوشته شده است بوسطی اندازند و اگر بیک حرف تلفظ
کنند همان حرفیکه در نقطهٔ راس نوشته شده است آنرا
تلفظ میکنند مثلاً میگویند زاویهٔ B C A یا زاویهٔ
A C B یا زاویهٔ a یا بتنهائی زاویهٔ
یا زاویهٔ C

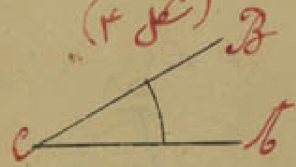
(۱۱) اگر هر دو ضلع یکزاویه را امتداد بدهند تغییری در بزرگی
و کوچکی آن زاویه دست نمیدهد و لاکن اگر آن دو ضلع را از هم
دور یا بیکدیگر نزدیک نمایند بزرگتر یا کوچکتر میشود اگر چنان
فرض کنند که نقطهٔ راس زاویهٔ a مرکز باشد از آن
مرکز قوس B A کشیده شود آن قوس اندازهٔ
این زاویه خواهد بود یعنی مقدار درجه را که آن قوس شامل است

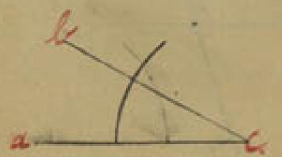
اندازهٔ

اندازهٔ این زاویه خواهد شد قوس B A دو مرتبه یا سه مرتبه
یا هر قدر که بخواهند بزرگتر یا کوچکتر میشود اگر زاویهٔ B C A
دو مرتبه یا سه مرتبه یا هر قدر که بخواهند بزرگتر یا کوچکتر شود

(۱۲) (شکل چهارم) از اینجا معلوم میشود که در روی
خط مستقیم a c از نقطهٔ c یکزاویهٔ a c b میتوان
احداث نمود که مساوی باشد بیک زاویهٔ دیگری مثلاً A
B C وقتیکه از نقطهٔ راس زاویهٔ داده شده بایک
نصف قطری مثلاً نصف قطر C A قوس A
B احداث کنیم و با همان نصف قطر در روی خط a c قوس
بزرگتر از قوس B A میکشیم بعد از آن از نقطهٔ c
خط c b را میکشیم زاویهٔ a c b حاصل میشود که مساوی
بزاویهٔ B C A

(شکل ۴)

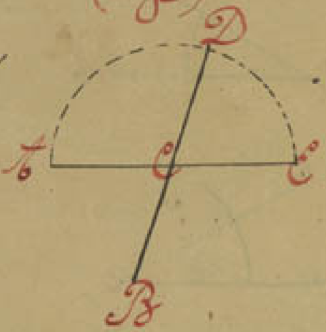




[illegible]

(۱۳) زوایا بر ۳ قسم اند که عبارت از زوایای قائمه و زوایای حادّه و زوایای منفرجه باشند اندازهٔ زوایای قائمه ربع محیط دایره است که عبارت از نود درجه باشد و اندازهٔ زوایای حادّه کمتر از نود درجه و اندازهٔ زوایای منفرجه زیادتر از نود درجه است

(شکل ۵)



(شکل پنجم)

(۱۴) (شکل پنجم) اگر خطین AC و BC را که ضلعین زاویهٔ ACB هستند از سمت نقطهٔ راس C امتداد بدهند زوایای ACD و BCE یا زاویهٔ ACB و DCE را زوایای متقابله میگویند هر دو زاویهٔ غیر متقابله را متمم یکدیگر میگویند زیرا که جمع آندو زاویه مساوی است بدو زاویهٔ قائمه و زاویه‌های متقابلهٔ همی باهم مساویند زیرا که اگر از نقطهٔ راس C بایک نصف قطر مطلق مثل AC نصف

دایرهٔ

دایرهٔ مثل ADE در روی خط مستقیم AE بکشند خط AE قطر آن دایره میشود و بدیهی است که آن نصف دایره مساوی است بصد و هشتاد درجه و الآن که این نصف دایره حاوی است زاویهٔ ACD بعلاوهٔ DCE را و قوس AD اندازهٔ زاویهٔ ACD و قوس DE اندازهٔ زاویهٔ DCE است پس زاویهٔ

$ACD + DCE = 180$ درجه $= 2$ زاویهٔ قائمه

پس معلوم شد که زاویهٔ ACD و زاویهٔ DCE که در روی خط مستقیم AE واقعند متمم یکدیگرند یعنی روی هم رفته مساویند بدو قائمه و از اینجا میتوان فهمید که یعنی

$ACD + DCE = 180$ درجه

$ACD + ACB = 180$ پس

$A C D + D C E = A C D + A C B$

یا انکه $B C A = E C D$ پس معلوم

شد که زاویتین متقابلتین باهم مساویند

(۱۵) (شکل ششم) اگر دو انتهای ضلعین زاویه A

B C را که نقطه A و نقطه B باشد بهم وصل

کنند یعنی خط B A را بکشند یک شکل حاصل میشود که ۳

زاویه دارد و آن شکل را مثلث نامند و خطوط A C

و B A و C B را اضلاع مثلث میگویند اگر ۳

ضلع یک مثلث باهم مساوی باشند آنرا مثلث متساوی

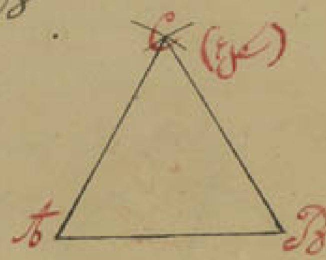
الاضلاع گویند اگر دو ضلعش باهم مساوی باشند آنرا

مثلث متساوی الساقین گویند و اگر هر ۳ ضلعش باهم

مختلف باشند آنرا مثلث مختلف الاضلاع گویند اگر در یک

مثلث

(شکل ششم)



مثلثی که یک زاویه قائمه یعنی زاویه نود درجه باشد انرا مثلث

قائم الزاویه گویند و اگر یک زاویه منفرجه باشد انرا مثلث

منفرجة الزاویه گویند و اگر زوایای آن حاده باشد انرا مثلث

حادة الزاویه بزوایا گویند و در هر مثلث قائم الزاویه ضلعی را

که مساوی است با قائمه زاویه وتر نامند و بزبان فرانسه

هیپوتنوس میگویند و دو ضلعین دیگرش را که محیط زاویه

قائمه اند قائمه نامند و بزبان فرانسه کاتت میگویند

(۱۶) (شکل هفتم) در خصائص مثلثات اولاً در هر مثلث

جمع دو ضلع آن بزرگتر است از یک ضلع دیگر مثلاً خط

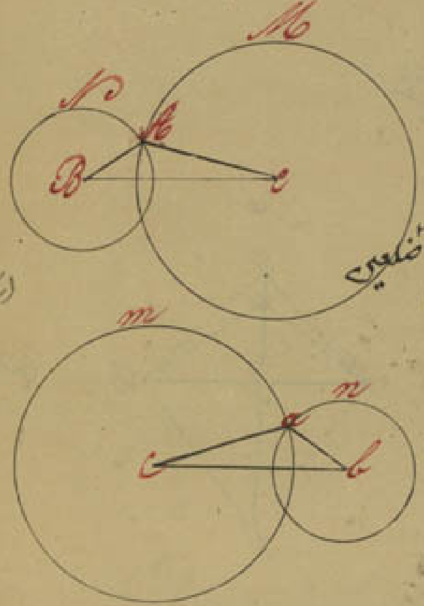
$C B < C D + A B$ زیرا که خط مستقیم

نزدیکترین راهست از نقطه بنقطه ثانیاً در مثلثهای

C B A و abc اگر دو ضلع با زاویه‌های

ضلعین

شکل هفتم



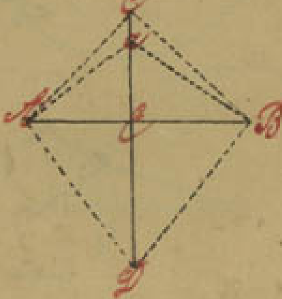
یعنی‌ها باهم مساوی باشند آندو مثلث باهم مساویند
ثالثاً در هر مثلث مثلاً ABC و abc
که دو زاویه و ضلعیکه از این دو زاویه کشیده شده اند باهم مساوی
باشند آندو مثلث باهم مساویند رابعاً در هر مثلث مثلاً
مثلثین ABC و abc اگر هر سه ضلع آنها بایکدیگر مساوی
باشند هر سه زوایای آن مثلث ها باهم مساویند و آندو
مثلث نیز باهم مساویند

فصل دوم در وضع خطوط مستقیم

فصل ۲

(۱۷) (شکل هشتم) وقتیکه خط مستقیم CD
با خط مستقیم AB بطوری تقاطع کند که زاویتین
حاصل شده باهم مساوی باشند یعنی هر یک از آنها نود
درجه باشد آنوقت میگویند خط CD عمود است بر خط
AB

شکل هشتم

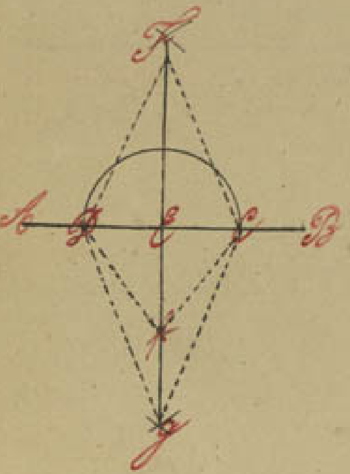


شکل هشتم

AB و بعبارتی خط AB عمود است بر خط
CD در صورتیکه زاویهٔ CA مساوی است
به BC و مساوی است به نود درجه
(۱۸) خصایص خط عمود اینها هستند که گفته میشوند
اولاً اگر فرض کنیم که خط AC = CB
و CD عمود است بر AB هر نقطه از خط عمود
CD فاصله اش از نقطهٔ A مساوی است
بفاصلهٔ آن نقطه از نقطهٔ B باین طریق که خط
AC = BC و خط Ad = Bd
همین حالت دارد هر نقطه را که فرض کنند ثانیاً اگر نقطه
d که در روی خط CD هستند بعد شان از نقطه
A و نقطهٔ B مساوی باشد باین معنی که اگر خط AC

سادی است بر B ح وخط B a = a A ط
در این صورت لازم می آید که خط D ح در نقطهٔ ح
عمود باشد بر خط B ط تا اثبات از همهٔ خطوط مستقیم
ح ط و a ط و ح ط و D ط وغیره که از نقطهٔ A
بر خط D ح کشیده شده اند خط عمود ح ط اقصر خطوط است
که از نقطهٔ ط بر خط D ح می توان کشید لکن چون
از همهٔ خطوط a ط و ح ط و D ط وغیره یک خط
شبهای می تواند که از سایرین کوتاه تر باشد پس از نقطهٔ ط
زیاده از یک عمود بر خط D ح نمی توان وارد آورد و همچنین
درحالتیکه خط مستقیم ح ط از همهٔ خطوط کوتاه تر
باشد لابد است که عمود باشد بر D ح
(۱۹) سابقاً معلوم کردیم که خط ط ح مساوی است به
B ح ط

B ح ح و همچنین زاویهٔ B ح ح = ح ح ط
ح B ح = ح ط ح و هر دو مثلث ح ح ط
و ح ح B قائم الزاویه هستند و وتر آنها که خط ط ح
و B ح است باهم مساویند و ضلع ح ح در هر دو مثلث
مشترک است پس می توان گفت که در هر مثلث قائم الزاویه
اگر وتر آنها با یک ضلع دیگر باهم مساوی باشند آن دو مثلث
باهم مساوی خواهند بود
(۲۰) (شکل نهم ۹) بعد از آنکه خصایص خط عمود
شناخته شد این اعمال را به آسانی می توان بجا آورد اولاً
اگر بخواهند خط مستقیم ح D را به دو قسمت مساوی
تقسیم کنند از نقطهٔ ح و نقطهٔ D با یک نصف قطری
که بزرگتر از نصف خط ح D باشد دو قوس احداث

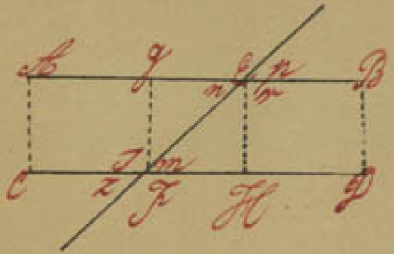
شکل نهم


میکنند که در نقطهٔ F و نقطهٔ G با هم تقاطع کنند بعد
خط مستقیم FG را میکشند که در نقطهٔ m خط CD
را به دو قسمت مساوی قسمت میکنند ثانیاً اگر خواهند
از نقطهٔ m در روی خط مستقیم AB که عمودی اخراج کنند
در روی خط AB خط Cm را میگیرند که مساوی باشد
بخط mD و با یک نصف قطر مطلق دو قوس احداث میکنند
که در نقطهٔ F و نقطهٔ G با هم تقاطع کنند بعد را از نقطهٔ
F و m یا m و G خط FG را میکشند که در نقطهٔ
m عمود میشود بر AB ثالثاً اگر از نقطهٔ G که در خارج
خط AB گرفته شده است بخواهند عمودی برای این خط دا
کنند از نقطهٔ G قوسی احداث میکنند که با خط AB
در نقطهٔ E و نقطهٔ m تقاطع کنند و از نقطهٔ E و نقطهٔ

م بایک

m با یک نصف قطر مطلق از بالای خط AB یا از زیر او
دو قوس طرح میکنند که در نقطهٔ F یا نقطهٔ f تقاطع کنند
پس از آن خط FG را میکشند که عمود میشود بر خط AB
(۲۱) (شکل دهم) می‌توان گفت که دو خط مستقیم با هم
متوازی‌اند که آن دو خط در روی یک سطح واقع شده باشند و فاصله
جمیع نقاط آنها از یکدیگر یک نوع باشند و آنها مثلاً خط
اینکه فاصله مابین آن دو خط عمودهایی است که از یکی از آنها
بر دیگری وارد آورند پس می‌توان گفت که عمودهای مابین دو خط
متوازی AB و CD و m با هم مساویند و مساوی‌اند
این عمودها بر یا سطور بدایت معلوم می‌نمایند که دو خط متوازی
هرگز با هم تقاطع نمیکنند اگر چه آنها را الی غیر النهایه
امتداد دهند وقتیکه با دو خط متوازی AB و CD و m

شکل دهم



بخط مستقیم EF [illegible] تقاطع کنند باید ملاحظه شود که اولا از زاویتین
متبادلتین که عبارت از زاویه‌های m و n و r و l
باشند باهم مساوی‌اند از برای اثبات این مطلب خط عمود
g [illegible] را بر زاویه BD [illegible] و [illegible] را بر روی
D [illegible] وارد می‌آورند مثلث قائم‌الزاویه [illegible]
مساوی است با مثلث قائم‌الزاویه [illegible] زیرا که
وتر آنها مشترک است و ضلع [illegible] مساوی است با ضلع
[illegible] پس باین جهت هر دو مثلث باهم مساوی‌اند و زاویه
$n = m$ ولاکن $n + r = 180$ درجه و $m + l = 180$
پس داخلتین $r + n$ مساوی است $l + m$
پس زاویه $l = r$ تا اینها زاویه‌های خارج و داخل
از یکطرف باهم مساوی‌اند باین طور که زاویه داخله m

مساوی است

مساوی است بزاویه خارجه p و زاویه خارجه [illegible]
مساوی است بزاویه داخله r و همچنین زاویه n
مساوی است به z بعلت اینکه زاویه $n = p$ و زاویه
$n = m$ پس زاویه $p = m$ ثالثا زاویتین
داخلتین از یکطرف روی هم رفته مساوی‌اند به ۱۸۰ درجه
که دو زاویه قائمه باشد باین معنی که زاویه $m + r$ یا زاویه
$l + n$ مساوی است به ۱۸۰ درجه بعلت اینکه
$r + n$ مساوی است ۱۸۰ درجه و $m = n$
پس زاویه $m + r = 180$ درجه


(شکل یازدهم)

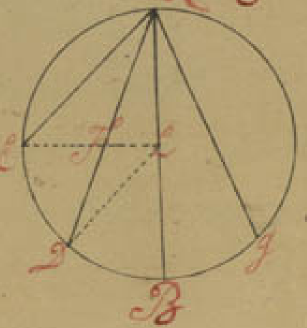
(۲۲) (شکل یازدهم) همچنین وقتیکه با دو خط مستقیم
AB و CD یکخط مستقیم دیگر مثل
EF تقاطع کرده باشد و این تقاطع بطوری باشد

که زاویه‌ای متقابله یا زاویه‌ای خارجه و داخله از یک طرف
باهم مساوی باشند یا آنکه جمع زاویه‌های داخله از یک طرف
مساوی باشد بنصف دو قائمه درجه آن دو خط باهم متوازیند

(۲۳) (شکل دوازدهم) ۱۲ اگر از یک نقطه از نقاط محیط
دایره چند خط وتر کشند مثل ab و ac و ad
و ae باید این ملاحظات را کرد
که اولاً وتر ab که از مرکز میگذرد از سایر وترها
بزرگتر است و آنرا قطر میگویند ثانیاً سایر وترها
هر قدر که از مرکز دورترند از وترهای نزدیک بمرکز کوچکترند

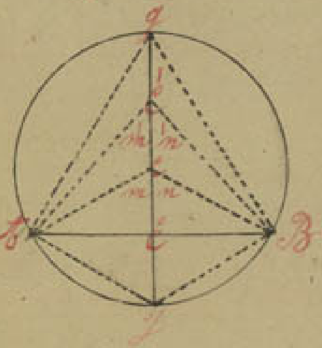
(۲۴) ازاینجا معلوم میشود که در یک نصف دایره عظیم‌ترین
قوس عظیم‌ترین وتر را محیط است و قصیرترین
قوس قصیرترین وتر را محیط است نمی باید چنان فرض

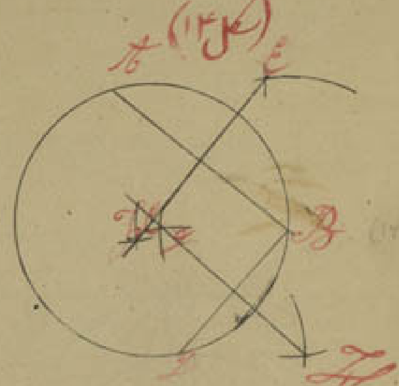
کرد



کرد که اگر قوسی از قوس دیگر دو مرتبه یا سه مرتبه
بزرگتر باشد وتر او نیز دو مساوی یا سه مساوی وتر
آن قوس میشود

(۲۵) (شکل سیزدهم) ۱۳ اگر دو وتر ab را خط
مستقیم cd تقاطع کرده باشد و اگر دو فقره از این
فقراتیکه گفته میشود حقیقت داشته باشند سه فقره
دیگر نیز حقیقت خواهد داشت فقرهٔ اول آنکه خط
مستقیم cd از مرکز گذشته است ثانیاً آنکه عمود
بر ab است ثالثاً آنکه خط cd وتر ab را
بدو قسمت مساوی قسمت میکند رابعاً آنکه قوس
ab را نیز بدو قسمت مساوی تقسیم میکند
خامساً زاویهٔ acb را بدو قسمت مساوی تقسیم میکند

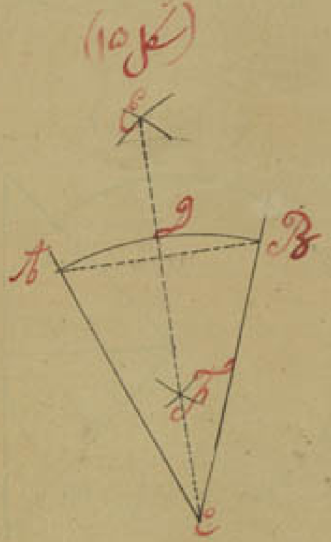




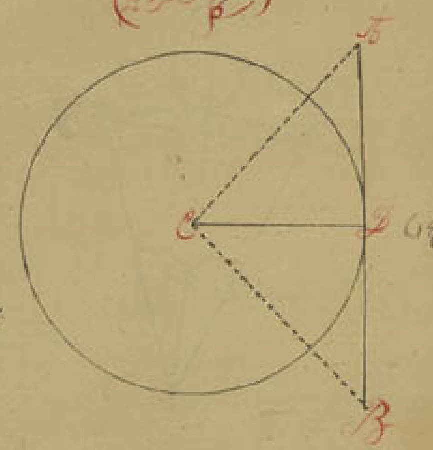
(۲۶) (شکل چهاردهم) ۱۴ بواسطهٔ این خصایص که ذکر شد
این مسائل را می‌توان جواب داد اولاً از سه نقطه که در روی
یک خط مستقیم نیستند مثل نقطهٔ A و B و C که از آنها
مثلث CBA را می‌توان ترکیب کرد یک محیط دایره بگذرانند
از برای این از نقطهٔ A تا B و از نقطهٔ B تا
C را میکشند هریک از این دو وتر را عمودی بر وسط آن
وارد می‌آورند که AC ع و AB م باشد و نقطهٔ م که
نقطهٔ تقاطع آن دو عمود است مرکز دایره ایست که از آن
سه نقطهٔ A و B و C باید بگذرد اگر چنان فرض کنیم
که این سه نقطه در روی یک خط مستقیم باشند عمودهائی که وارد
آورده میشوند هرگز یکدیگر را تقاطع نمیکنند زیرا که آن عمودها
باهم متوازی میشوند و در این حالت چنان خیال میکنند که نقطهٔ

تقاطع

تقاطع این دو عمود در امتداد الاغیر النهایه انها است و هر خط
مستقیم را مثل دایره فرض میکنند که نصف قطر آن الاغیر النهایه
بزرگ باشد ثانیاً اگر بخواهند مرکز یک دایره یا یک قوس را پیدا
کنند باین طور پیدا می‌نمایند در روی آن قوس یا آن دایره سه نقطه
فرض میکنند و از آن نقطه‌ها دو وتر میکشند و از وسط وترها عمود
اخراج میکنند نقطهٔ تقاطع عمودها مرکز آن قوس یا آن دایره میشود
ثالثاً (شکل پانزدهم) اگر بخواهند زاویهٔ CBA را
بدو قسمت مساوی تقسیم کنند باین طور میکنند از نقطهٔ C بایک
نصف قطر مطلق قوس BE A را میکشند و از
A و نقطهٔ B قوسهایی را که در م و در AC تقاطع
میکنند احداث می‌نمایند و از این نقطهٔ تقاطع خط CE را
میکشند که زاویهٔ CBA را بدو قسمت مساوی تقسیم

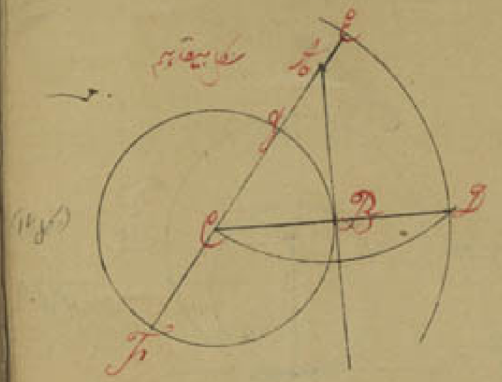


میکنند زیرا که آنخط از نقطهٔ ع میگذرد و عمود است بر وسط وتر
ب ح که دو قوسی را که در نقطهٔ آ ح تقاطع کرده اند بکشیدن
احتیاج نیست بعلت اینکه از نقطهٔ م به نقطهٔ ع که مرکز است
یکخط مستقیم میتوان کشید و از همین قاعده میتوان یک دایره را
بچهار به هشت به شانزده بسی و دو وغیره قسمتهای مساوی
قسمت نمود



(۲۷) (شکل شانزدهم) ۱۶ یکخط مستقیم مثلا خط ب گ
که با محیط دایره در یک نقطه مثلا نقطهٔ ط اتصال بهم برساند
آنخط را مماس و آن نقطه را نقطهٔ مماس میگویند و وقتیکه نقطهٔ
مماس را با نصف قطر ط ع بمرکز ع وصل کنند آن نصف
قطر عمود میشود بر خط مماس و بالعکس اگر یکخطی به منتهاالیه
نصف قطر عمود باشد آنخط مماس آندایره میشود و اگر بخواهند

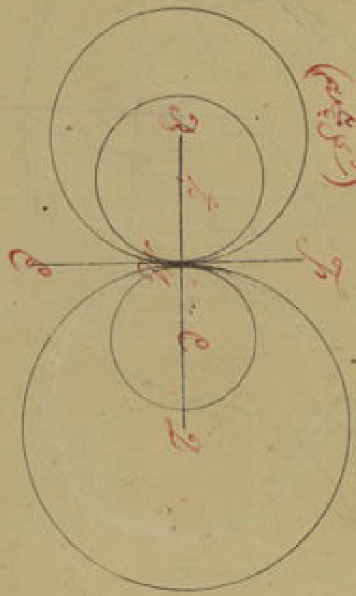
یک



۱۷
یک مماس از نقطهٔ گ (شکل هفدهم) از برای یک دایرهٔ
داده شده وارد بیاورند از نقطهٔ گ با یک نصف قطر مثل
ع گ قوس ه ح ع را احداث میکنند و از مرکز ع با یک
نصف قطر که مساوی باشد به آ ح مثل م ع که مساوی
نصف قطر ح ع است قوس ه ح م را احداث میکنند
و از مرکز ع و نقطهٔ تقاطع ح خط ح ع را میکشند و پس
از آن از نقطهٔ گ و نقطهٔ ب خط ب گ را میکشند
که مماس میشود بدایرهٔ داده شده

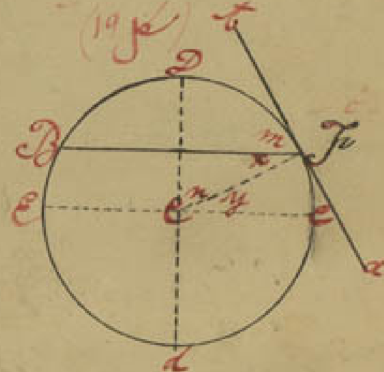
(۲۸) وقتیکه دو دایره باهم مماس داشته باشند اگر
کوچکتر این دو دایره در میان دایرهٔ بزرگتر باشد یا آنکه خارج
از دایرهٔ بزرگتر باشد مرکز این دو دایره با نقطهٔ مماس یک
خط مستقیم واقع شده اگر این دو دایره در میان هم با یکدیگر مماس داشته

باشند فاصلهٔ مرکز آنها مساوی است به تفاوت نصف قطر آنها
(شکل هیجدهم)[18] واگر دو خارج با هم مماس داشته باشند فاصلهٔ
مرکز آنها مساوی است بجمع نصف قطر آنها اگر بر دو مرکز با نقطهٔ
مماس در روی یک خط مستقیم نباشند لازم می آید که از این سه نقطه
یک مثلث مرکب شود که جمع دو ضلع آن مساوی باشد بیک ضلع
دیگرش و این محال است



(شکل ۱۸)

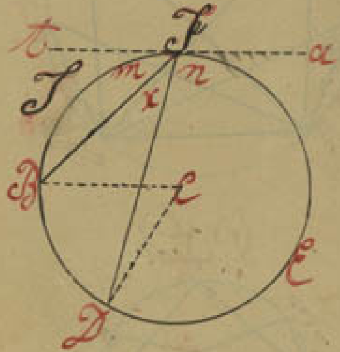
(۲۹) شکل نوزدهم زاویهٔ m که عبارت از زاویهٔ
BF باشد مرکب است از مماس F و
وتر FB اندازهٔ او نصف قوس BDF است
که قطع کرده است با وتر پس $m = \frac{1}{2} BDF$
از برای اثبات این مطلب قطر ج ه را میکشند که متوازی
باشد با BF و D را میکشند که عمود باشد بر BF



(شکل ۱۹)

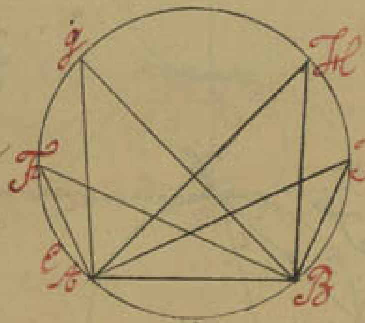
شکل اینکه

شکل اینکه F عمود است بر F در اینجا $m + x = 90^\circ$
و $n + y = 90^\circ$ پس $m + x = n + y$
ولاکن $x = y$ پس $m = n$ همچنانکه m مساوی ست
بقوس FD مساوی است به $\frac{1}{2}$ قوس TDB
لابد است که m مساوی باشد به نصف FDB
(۳۰) (شکل بیستم)[20] زاویهٔ x که در روی محیط دایره از
وترهای FD و FB مرکب شده است آنرا زاویهٔ محیطیه
گویند اندازهٔ او نصف قوس است که دو ضلع این زاویه بآن مشتمل
شده اند باین طور که زاویهٔ $x = \frac{1}{2} BD$ از برای اثبات
این مطلب مماس aF را میکشند و پس از آن
معلوم میشود $m + x + n = 180^\circ = \frac{1}{2} FTBDEF$
$= \frac{1}{2} FTB + \frac{1}{2} BD + \frac{1}{2} DEF$



(شکل ۲۰)

(شکل بیست یک)



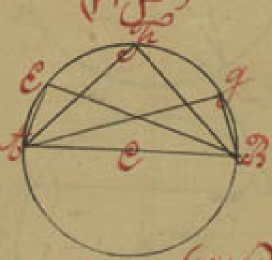
(شکل ۲۱)

ولاکن $m=\frac{1}{2}BTF$ و $n=\frac{1}{2}DEF$

پس $x=\frac{1}{2}BD$ ازاینجا معلوم میشود که اولاً هر زاویه که راس او در روی محیط دایره باشد نصف زاویه است که راسش در مرکز باشد باینطور که زاویهٔ $x=\frac{1}{2}BCD$

ثانیاً (شکل بیست دوم) جمیع زوایای محیطیه که ضلعین آنها منتهی شده اند بیک قوس باهم مساویند مثل زوایای E و F و G و H و T که ضلعین آنها منتهی شده است بقوس B A زیرا که اندازهٔ همهٔ آنها نصف قوس B A است ثالثاً (شکل بیست دوم)

(شکل ۲۲)



هر زاویهٔ محیطیه که منتهی شده باشد بدو انتهای قطر آن زاویه زاویهٔ قائمه است بعلت اینکه اندازهٔ آن نصف نصف دایره است

(شکل ۲۳)



رابعاً (شکل بیست سوم) هر اربعة الاضلاع که در میان

یکدایره

یکدایره کشیده شده باشد و اضلاع او منتهی شده باشد بمحیط هر دو زاویهٔ مقابلهٔ آن مساوی است به ۱۸۰ درجه باین طریق که $x+y=180^\circ$ و $m+n=180^\circ$ زیرا

$x=\frac{1}{2}MNB$ و $y=\frac{1}{2}MAGB$

پس $x+y=\frac{1}{2}MNBGA$

$=\frac{1}{2}MAGNM=180^\circ$

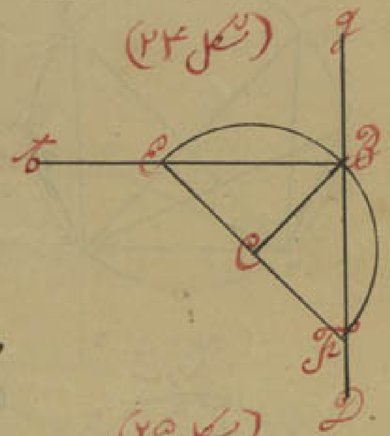
سادساً

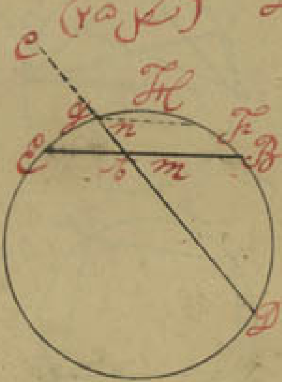
خامساً وترهای متساویه منتهی شده اند بقوسهای متساویه و بالعکس قوسهای متساویه را وترهای متساویه منتهی شده اند زیرا که در شکل ۲۳ زاویهٔ $c=a$ ولاکن $a=\frac{1}{2}BD$ و $c=\frac{1}{2}AE$ پس $\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}AE$

پس $BD=AE$

(۳۱) (شکل بیست چهارم) از دانستن قواعد مذکوره توان

از نقطهٔ BF که منتهی الیه خط B است عمود BD را
احداث کرد اگر چه نتوانیم آن خط را امتداد بدهیم از برای اینکه
یک نقطه در روی خط BF مثل F انتخاب میکنیم مثلاً نقطهٔ C
و بایک نصف قطر CB قوسی احداث میکنیم که در نقطهٔ e
تقاطع کنند پس از آن خط F C e را میکشیم و در روی
این خط FC e را میگیریم که مساوی باشد با Ce و از نقطهٔ
F خطی میکشیم به نقطهٔ B و خط BD عمود میشود
در نقطهٔ B بر خط BF بعلت اینکه زاویهٔ F
BD مساوی است به $180° \, \frac{1}{2}$ مساوی است
به $90°$





(۳۲) (شکل بیست و پنج) زاویهٔ e g F که در روی
محیط دایره است و مرکب شده است از وتر F g و خط

بگیریم

مستقیم g اگر آن خط را امتداد بدهند در یک نقطهٔ دیگر
نیز با دایره تقاطع خواهد کرد مثل نقطهٔ D اندازهٔ آن زاویه
نصف قوس F H g و نصف قوس g
e D است با این طریق که



$$e g F = \frac{1}{2} g H F + \frac{1}{2} g e D$$

زیرا که زاویهٔ $e g F + F g D = 180° =$
$$= \frac{1}{2} g F D e g = \frac{1}{2} g H F +$$
$$+ \frac{1}{2} g e D + \frac{1}{2} D B F$$
ولکن زاویهٔ $F = \frac{1}{2} D B F = n$ پس زاویهٔ
$$e g F = \frac{1}{2} g H F + \frac{1}{2} g e D$$
(۳۳) زاویهٔ m که در شکل بیست و پنج در میان محیط
واقع است اندازه‌اش نصف قوس $e g + \frac{1}{2} B$

بااین طریق $m = \frac{1}{2}BD + \frac{1}{2}EG$ از برای

اسباط این خط FG را متوازی میکشند BC

وازاینجا حاصل میشود $n = \frac{1}{2}DBF =$

$= \frac{1}{2}DB + \frac{1}{2}BF = \frac{1}{2}DB + \frac{1}{2}EG$

ولاکن چون میدانیم $m = n$ ~~$m = n$~~

میتوانیم بگوئیم $m = \frac{1}{2}DB + \frac{1}{2}EG$

(۳۴) (شکل سی و ششم) زاویهٔ BAD

که عبارت از زاویهٔ m باشد واقع است در خارج

دایره و مرکب شده است از خطین BA و AD

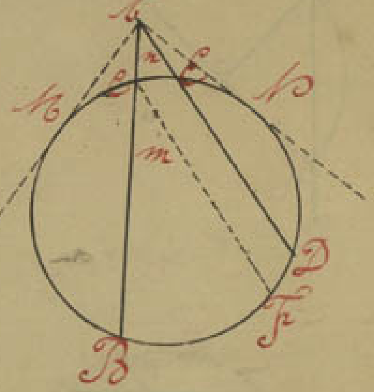
که در دو نقطه با دایره تقاطع کرده اند اندازهٔ آن زاویه

نصف تفاوت قوسهای است که این دو خط تقاطع کرده اند

مثلاً CE $m = \frac{1}{2}BD - \frac{1}{2}CE$ از برای اسباط

این مطلب

(شکل ۲۴)



این مطلب و شرح FC را میکشند که متوازی باشد بخط BA

D آنوقت این تساوی حاصل میشود $= \frac{1}{2}BF = m$

$= \frac{BD - FD}{2} = \frac{1}{2}BD - \frac{1}{2}FD =$

$= \frac{1}{2}BD - \frac{1}{2}CE$

زیراکه $CE = FD$ ولاکن زاویهٔ $m = n$

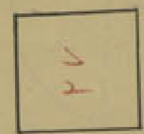
پس $n = \frac{1}{2}BD - \frac{1}{2}CE$

فصل هفتم

در اشکال کثیر الاضلاع

(۳۵) هر سطح مستوی که محصور شده باشد بخطوط مستقیم آنرا شکل کثیر الاضلاع گویند و هر یک از آن خطوط را ضلع آن شکل خوانند و همهٔ اضلاع را روی هم رفته محیط آن شکل نامند و اشکال کثیر الاضلاع را از قرار علم

ضلع آنها را نامند باین طریق شکلی که سه ضلع دارد آنرا
مثلث و شکلیکه چهار ضلع دارد آنرا مربع یا ذوات الاربعة الاضلاع
گویند و همچنین مخمس و مسدس و مسبع و مثمن و غیره خوانند
در خصوص مثلثات سابق برین گفتگو کرده‌ایم و لاکن میباید
دانست که مثلث را وقتی متشابه میگویند که هر یک
از زوایای آنها با یکدیگر مساوی باشند و ارتفاع یک مثلث
عبارت است از عمود که از یکی از زوایای مثلث بر ضلع
منعکس آن زاویه وارد آورند و آن ضلع را که عمود بر او وارد
آورده شده است وتر مثلث خوانند اشکال ذوات الاربعة
الاضلاع را باین قسم نامند هر ذوات الاربعة الاضلاع که ضلع
برابر یکدیگر آن باهم متوازی باشند آنرا متوازیة الاضلاع
خوانند (شکل ۲۷ تا ۳۰) هر شکل متوازیة الاضلاع



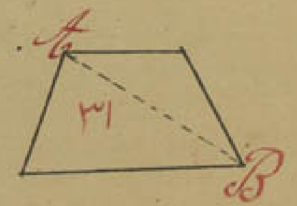






که هر یک از ضلعها و زوایای آن باهم مساوی باشند آنرا
مربع خوانند مثل (شکل ۲۷) هر شکل متوازیة الاضلاع
که ضلعهای آن دو بدو با یکدیگر مساوی و متوازی باشند و همه
چهار زاویه آن باهم مساوی باشند آنرا مربع مستطیل
گویند مثل (شکل ۲۸) و هر شکل متوازیة الاضلاع که هر
چهار ضلعش باهم مساوی باشند و زوایایش دو بدو باهم
مساوی باشند آنرا لوزی یا معین خوانند مثل (شکل
۲۹) و هر شکل متوازیة الاضلاع که ضلعهای آن دو بدو
با یکدیگر مساوی و متوازی باشند و لاکن زوایای آن قائمه
نباشند آنرا شبیه معین خوانند مثل (شکل ۳۰) عمودی
که از یکی از اضلاع شکل متوازیة الاضلاع بر ضلع
دیگر وارد آورند آنرا ارتفاع آن شکل خوانند و هر یک

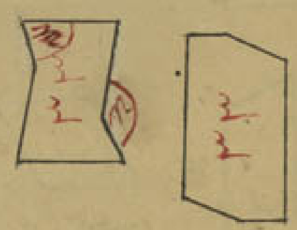
از این دو ضلع را که عمود از یکی بر دیگری وارد آمده است ارتفاع
متوازیة الاضلاع خوانند و هر ذو اربعة اضلاعی که دو ضلع آن
باهم متوازی باشند آنرا ذو زنقه یا ذو زنقتین گویند (شکل ۳۱)



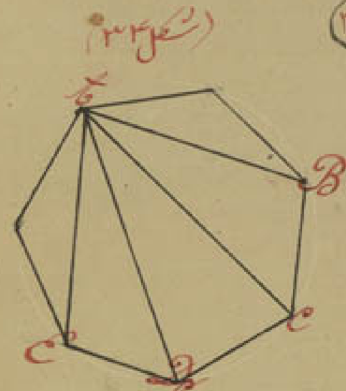
هر ذو اربعة اضلاعی که هیچ یک از اضلاع آن باهم متوازی
نباشند آنرا شبه ذو زنقه خوانند (شکل ۳۲) و عموماً



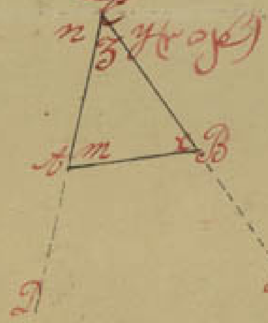
اشکال کثیر الاضلاع یا با قاعده اند یا بی قاعده اشکال
کثیر الاضلاع با قاعده آنست که جمیع اضلاع و زوایای
آن باهم مساوی و متوازی باشند مثل (شکل ۲۷ و ۳۴)
و کثیر الاضلاع بی قاعده آنست که اضلاع و زوایای آن باهم
مساوی نباشند کثیر الاضلاع سیمتریک شکلی را گویند
که عدد اضلاع آن جفت باشد و هر ضلعین متقابلین آن باهم
متوازی و متساوی باشند (شکل ۳۳) زاویه که در



محیط یک کثیر الاضلاع بواسطه دو ضلع مرکب شده باشد آنرا
زاویه شکل کثیر الاضلاع گویند و این زاویه یا میل بخارج دارد
مثل زاویه m یا میل بداخل دارد مثل زاویه n در (شکل ۳۳)
هر خط مستقیمی که از یکی از زوایای کثیر الاضلاع بزاویه
دیگر کشیده شده باشد آنرا خط دیاگونال گویند مثل خط
BC در (شکل ۳۱) و خطوط BC و [illegible] و [illegible]
و [illegible] در (شکل ۳۴)



(۳۶)(شکل ۳۵) در هر مثلث مثلاً ABC
جمع سه زاویه آن مساوی است بدو زاویه قائمه که (۱۸۰°)
باشد باینطور که $m+x+z=(180^\circ)$ از برای
اثبات این خط [illegible] را متوازی AB میکشیم و این
حاصل میشود که زاویه $n+z+y=(180^\circ)$



ولاکن $x = y$ و $n = m$ پس (180°) $x + z + m$
و از این نتایج مفصلهٔ ذیل حاصل میشود که اولاً در یک
مثلث زیاده از یک زاویهٔ قائمه نمیتواند باشد ثانیاً در هر مثلث
قائم الزاویه جمع دو زاویهٔ حادهٔ آن مساوی است به نود درجه
و وقتیکه یکی از آن دو زوایا شناخته شود آن یکی نیز
شناخته میشود مثلاً اگر یکی مساوی باشد به پنجاه درجه
آن یکی بدیهی است که چهل درجه خواهد بود ثالثاً وقتیکه
دو زاویهٔ یک مثلث شناخته شود زاویهٔ سیم نیز شناخته
میشود مثلاً اگر $(60^\circ) = m$ و $(40^\circ) = x$ پس

$$z = (180^\circ) - (m + x) = (180^\circ) - 100 = (80^\circ)$$

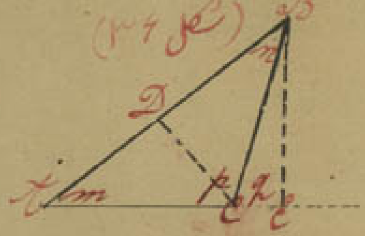
رابعاً وقتیکه دو زاویهٔ دو مثلث مساوی باشند یکا بدیگری زاویهٔ
سیم آنها نیز باهم مساوی خواهند بود و آن دو مثلث باهم متشابه

خواهند

مساوی
خواهند شد و در این حالت اگر یکی از اضلاع یک مثلث
باشد بیکی از اضلاع مثلث دیگر آن دو مثلث متساوی السطح
میشوند خامساً (شکل ۳۵) اگر خطین DH و
BG را از دو سمت خط BH بکشند بقسمی که
زاویهٔ $x + m$ کوچکتر باشد از ۱۸۰ درجه خطین DH
و BG را اگر امتداد بدهند در یک نقطه مثلاً نقطهٔ C باهم
تقاطع میکنند و پس از آن از سمت منعکس از یکدیگر بعد
باهم میرسانند سادساً (شکل ۳۶) مثلاً اگر در یک
مثلث C B ... عمودی بر ضلع B... از نقطهٔ
C وارد آورند آن عمود از میان مثلث میگذرد و این در صورتیست
که زاویتین m و n حاده باشند و لاکن اگر زاویهٔ
n منفرجه باشد عمود CB بخارج مثلث وارد میشود

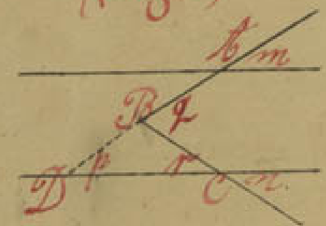
(۳۷) (شکل ۳۶) اگر یکی از اضلاع مثلث را امتداد بدهند مثلاً ضلع CA زاویهٔ خارجه کشیده BCE یا زاویهٔ q باشد مساوی است بجمع زاویتین داخلتین m و n باین طریق $q = m + n$ زیرا که $m + n + p = 180°$ و همچنین $p + q = 180°$ پس $m + n + p = p + q$ اگر از طرفین تساوی p تفریق شود باقی میماند $m + n = q$

(شکل ۳۶)



(۳۸) (شکل ۳۷) از قاعده که گفته شد معلوم میشود زاویهٔ CBA که در مابین دو خط متوازی واقع شده است که عبارت از زاویهٔ q باشد مساوی است بجمع زاویتین m و n که مرکب شده اند از تقاطع اضلاعی این زاویه با دو خط متوازی باین طریق که $q = m + n$ از برای اثبات

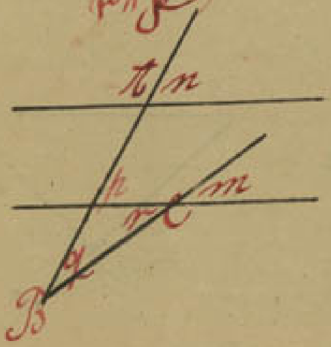
(شکل ۳۷)



این مطلب

این مطلب ضلع BA را تا نقطهٔ D امتداد میدهیم و تا و حاصل میشود $q = p + r$ و لاکن $p = m$ و $r = n$ پس $q = m + n$ (شکل ۳۸)

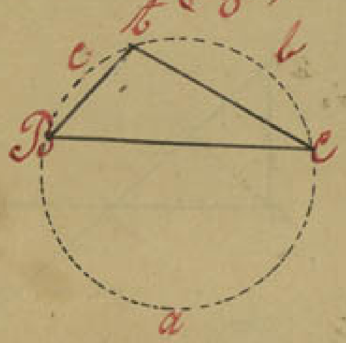
(شکل ۳۸)



و لاکن بخلاف زاویهٔ CBA که عبارت از زاویهٔ q باشد که در خارج دو خط متوازی واقع شده است مساوی است به تفاوت مابین m و n باین طریق که $q = n - m$ زیرا که $r = q + p$ یا آنکه $q = r - p$ و لاکن $p = m$ و $r = n$ پس $q = n - m$

(۳۹) (شکل ۳۹) در هر مثلث بزرگترین زاویه را بزرگترین ضلع مقابل است و کوچکترین زاویه را کوچکترین ضلع مقابل است زیرا که از دور مثلث CBA یکدایره طرح میکنیم آنوقت معلوم میشود که زاویهٔ A

(شکل ۳۹)



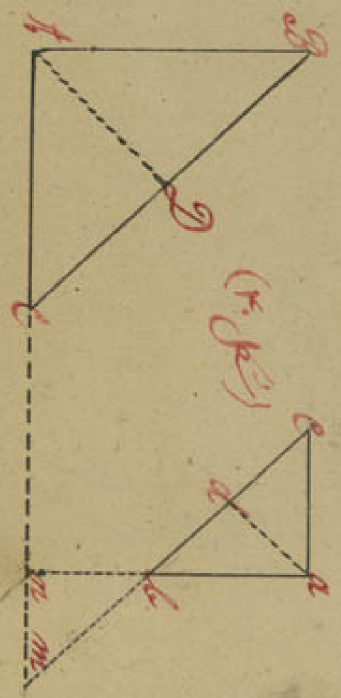
بزرگتر است از زاویهٔ ع و همچنین معلوم میشود که نصف
قوس ع a B بزرگتر است از نصف قوس
A C B بعلت اینکه e a B $\frac{1}{2}$ = A C و
A C B $\frac{1}{2}$ = ع پس بدیهی است که وتر e B
بزرگتر است از وتر B A

(۴۰) از اینجا معلوم میشود اولاً در یک مثلث زوایای
متساویه اضلاع متساویه مقابلند و بالعکس ثانیاً در
مثلث متساوی الاضلاع جمیع زوایای آن باهم مساوی است
و هر یک از آنها ثلث ۱۸۰ درجه است که ۶۰ درجه
باشد ثالثاً در هر مثلث متساوی الساقین زاویتین
که مقابلند به ضلعین متساویتین باهم مساویند
رابعاً در هر مثلث متساوی الساقین که یک زاویه

شناخته

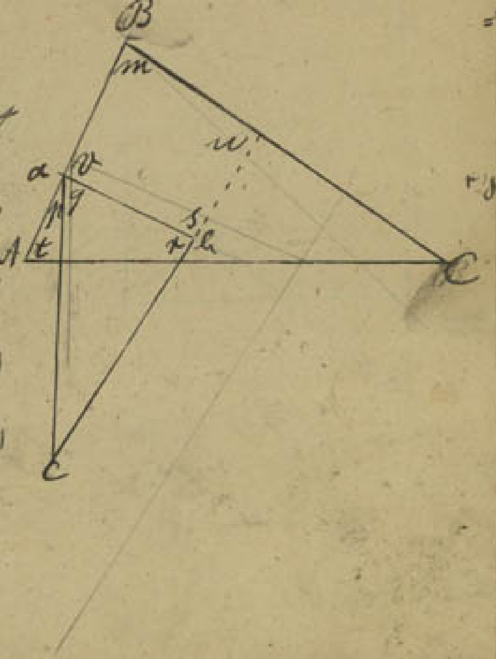
شناخته شود زاویتین دیگر نیز شناخته میشود
خامساً در یک مثلث متساوی الساقین اگر از زاویه
مابین ضلعین متساویتین است خط مستقیم بر ضلع مقابل
آن زاویه وارد آورند اگر یکی از این سه فقره که ذکر میشود
حقیقت داشته باشد دو فقرهٔ دیگر نیز حقیقت دارد اولاً
اینکه آن زاویه بدو قسمت مساوی تقسیم شده باشد ثانیاً
اینکه ضلع مقابل زاویه نیز بدو قسمت مساوی تقسیم شده
باشد ثالثاً اینکه آن خط وارد آورده شده عمود باشد بر آن
ضلع و اگر دو فقره از این سه فقره که گفته شد حقیقت داشته
باشد آن مثلث باید متساوی الساقین باشد

(۴۱) (شکل ۴۰) وقتیکه در دو مثلث شکل
ع B و ع ... سه ضلع از یک مثلث متوازی



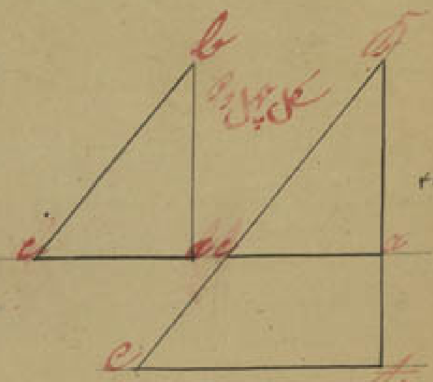
(شکل ۴۰)

باشند با سه ضلع مثلث دیگر آن دو مثلث باهم متشابه
میشوند و زوایای این دو مثلث با یکدیگر مساوی میشوند
باین طریق که زاویهٔ $c = c$ و $a = a$ و $B = B$
از برای استنباط این مطلب یک ضلع مثلث اول را با
ضلع مثلث ثانی امتداد میدهیم تا آنکه باهم تقاطع کنند آنچه
تا و حاصل میشود $= m$ و همچنین $c = m$ پس
$c = c$ زاویهٔ $= n$ و همچنین $a = n$ پس
$= a$ همچنین وقتیکه دو مثلث مثل cB
و ba (شکل ۴۱) اضلاع یکی از مثلثها عمود باشند
بر اضلاع مثلث دیگر یا آنکه امتداد اضلاع یکی عمود بر امتداد
اضلاع دیگری شود آن دو مثلث باهم متشابه میشوند از برای اثبات
این مطلب فرض میکنیم که ضلع عمود باشد بر B



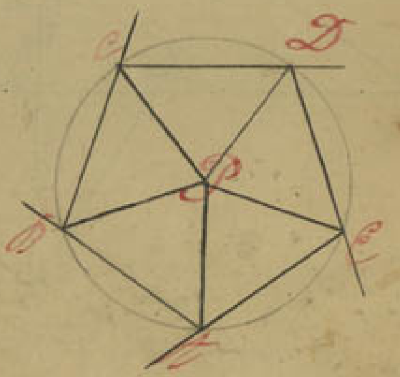
وده

و ba عمود باشد بر c و امتداد عمود باشد
بر Bc این و حاصل میشود $q^{\circ} = q + p$ و
$q^{\circ} = t + p$ پس $t + p = k + q$ یا $t = q$
و همچنین $m + s + v + u = 2 \times 180 = 360^{\circ}$
و لاکن $q^{\circ} = v$ و $q^{\circ} = u$ پس $180^{\circ} = s + m$ و
$180^{\circ} = s + r$ پس $s + r = s + m$ یا
$r = m$ چون دو زاویه از این دو مثلث باهم مساوی
بودند لابد است که زاویهٔ سیم آنها نیز باهم مساوی باشند
پس $c = c$ و هر دو مثلث باهم متشابه اند
(۴۲) اگر مثلث c را که متشابه است با مثلث
Bc بر روی مثلث Bc بگذارند بقسمیکه زاویه
در روی مساوی خودش زاویهٔ B قرار بگیرد و ضلع



در ضلع به ح بشود و ضلع ح ساد در روی ضلع ع ح بشود
ضلع مستقیم ع ه متوازی میشود با ضلع ح ک دلیل در (شکل ۴۲)
ما میدانیم که زاویهٔ ک ط = ه یا آنکه زاویهٔ ع = ح پس چون
زاویتین خارجه و داخله ک ح و ه یک ور ح که در یک طرف
واقع و با هم مساوینید دلیل است برانکه میباید خط ح ه
متوازی باشد بخط ح ک

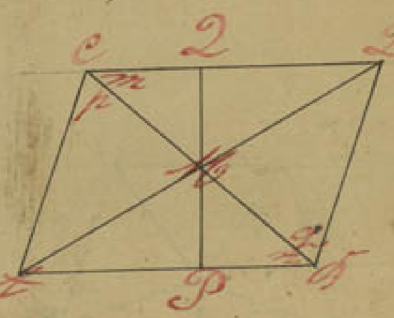
(۴۳) جمع زوایای هر کثیر الاضلاع مساویست با قدر
۱۸۰ درجه که در آن کثیر الاضلاع زوایای یا اضلاع هستند منهای
۳۶۰ یا آنکه مساویست با قدر ۱۸۰ درجه که در آن کثیر الا
ضلاع اضلاع هستند منهای دو ضلع دلیل در (شکل ۴۳)
جمع زوایای مثلثاتی که در این کثیر الاضلاع هستند چند مساویست
به ۵ × ۱۸۰ ولاکن زوایایکه در دور نقطهٔ ...



جمع شده اند و مساوینید به ۳۶۰ درجه میباید منهای شود تا معلوم
شود که زوایای کثیر الاضلاع چند درجه اند پس جمع زوایای
کثیر الاضلاع این میشود ۵۴۰ = ۳۶۰ − ۹۰۰ = ۳۶۰ − ۵ × ۱۸۰
از اینجا نتایج مفصلهٔ ذیل حاصل میشود اولاً جمیع زوایای
خارجهٔ یک کثیر الاضلاع که از امتداد ضلعهای آن حاصل میشوند
جمع آنها ۳۶۰ درجه میشوند از برای اثبات این مطلب فرض
میکنیم که عدد اضلاع کثیر الاضلاع ن باشد و جمع زوایای داخله
آن ی باشد و جمع زوایای خارجهٔ آن ع باشد این مساوی
حاصل میشود ۱۸۰ × ن = ی + ع ولاکن ما ثابت
کرده ایم که ۳۶۰ − ۱۸۰ × ن = ی پس از اینجا
این مساوی را حاصل میکنیم ۱۸۰ × ن = ۳۶۰ − ۱۸۰ × ن + ع
یا ۳۶۰ = ع ثانیاً هر یک از زوایای یک مربع یا یک مستطیل



یکی زاویهٔ قائمه است زیرا که هر چهار زاویه باهم مساوی‌اند و جمع آنها
۳۶۰ درجه است پس هریک از آنها ۹۰ درجه است که یک قائمه
باشد ثم ثانیاً هریک از زوایای یک کثیر الاضلاع منتظم یعنی کثیر الاضلاعی
که اضلاع تمام آن باهم مساوی باشند اگر عدهٔ اضلاع را n فرض
کنیم هریک از زوایا مساوی میشوند $= \frac{n \times ۱۸۰ - ۳۶۰}{n}$
$۱۸۰ - \frac{۳۶۰}{n} =$ از اینجا معلوم میشود که هریک از زوایای
یک ذو خمسة الاضلاع منتظم مساوی است $۱۰۸ = ۱۸۰ - \frac{۳۶۰}{۵}$

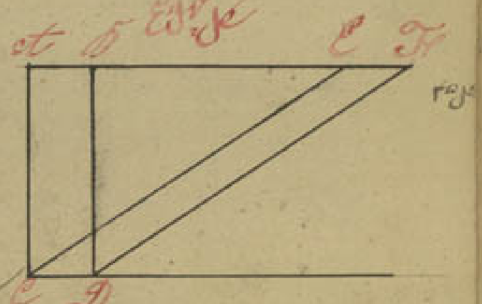


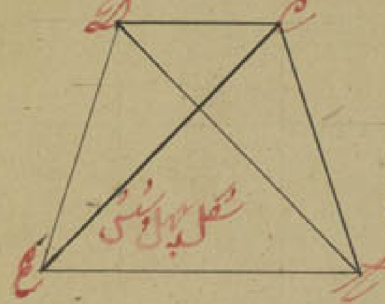
(۴۴) (شکل ۴۴) اگر در یک ذو اربعة الاضلاع ضلعین
مقابل یکدیگر دو بدو باهم متوازی باشند مساوی نیز میشوند ۳۳۴
زیرا که در مثلثین Bk c و Dd c زاویهٔ
n = n و o = o و ضلع Bc مشترک است
ما بین هردو مثلث پس این دو مثلث باهم مساوی‌اند و ضلع

Bk = Dc و Dd = Bc و همچنین
اگر در یک ذو اربعة الاضلاع ضلعین مقابل یکدیگر دو بدو باهم
مساوی باشند متوازی نیز هستند همچنین اگر تنها دو ضلع مقابل
یکدیگر معلوم شود که باهم مساوی و متوازی‌اند دو ضلع دیگر نیز لابد
که باهم مساوی و متوازی باشند
(۴۵) در هر ذو اربعة الاضلاع که متوازی الاضلاع نیز باشند
خصایص مفصلهٔ ذیل وجود دارد اولاً هریک از خطین قطریا
گونیای Dd و Bc آن متوازی الاضلاع را به دو
مثلث مساوی تقسیم میکنند و هریک از آن مثلثها نصف
آن متوازی الاضلاع است ثانیاً هریک از خطین Dd
و Bc در نقطهٔ تقاطع h به دو قسمت مساوی
تقسیم شده‌اند و دلیلش این است و مثلثات است که از تقاطع

آند و خط حاصل شده اند ثالثاً هر خط مستقیم که از نقطهٔ تقاطع
[illegible] بگذرد ذوات اربعة الاضلاع را بدو قسمت مساوی تقسیم
میکند و این از تساوی مثلثین C D [illegible] و [illegible] B [illegible]
ظاهر است

(۴۶) دو متوازی الاضلاع شکل C D B [illegible]
و F D C [illegible] که یک قاعدهٔ مشترک دارند شکل
C D اگر ارتفاعشان مساوی باشد سطحشان نیز
با هم مساوی میشوند و همین طریق است اگر مابین
دو خط متوازی واقع شده باشند دلیل (شکل ۴۵)
مثلث F D B مساوی است بمثلث [illegible]
[illegible] C اگر این دو مثلث را از شکل [illegible] F D C [illegible] تفریق
کنند باقی میماند B D C [illegible] که مساوی است به [illegible]
C D F





F D C
(۴۷) از آنجا نتایج مفصلهٔ ذیل حاصل میشود اولاً (شکل ۴۶)
دو مثلث که قاعده شان یکی باشد و واقع شده باشند مابین
دو خط متوازی سطحشان مساوی است باین طریق که مثلث
D C [illegible] مساوی است بمثلث D C [illegible] ثانیاً دو متوازی
الاضلاع یا دو مثلث که قاعدهٔ آنها و ارتفاعشان باهم مساوی
باشند باید سطح آنها نیز با هم مساوی باشند ثالثاً دو متوازیة الاضلاع
یا دو مثلث که ارتفاعشان یکی باشد نسبتشان بیکدیگر
مثل نسبت قاعدهٔ آنهاست یا اگر قاعده شان یکی باشد نسبتشان
مثل نسبت ارتفاع آنهاست بیکدیگر
(۴۸) هر دو ربع کثیر الاضلاع منتظم میتوان یک دایره کشید
بطریقیکه رؤس جمیع زوایای آن متصل بدایره شده باشند

(۴۹) از اینجا معلوم میشود که اولاً در هر کثیر الاضلاع منتظمه
اگر از زوایای آن تا مرکز خطوط کشیده شوند بقدری مثلث
متساوی الساقین که با یکدیگر مساوی هم باشند حاصل میشود
که در آن کثیر الاضلاع منتظمه اضلاع یا زوایا هستند ثانیاً
اگر عدد اضلاع آن کثیر الاضلاع منتظمه n باشد هر ضلع آن
قوس را در بر میگیرد که مساوی باشد به ۳۶۰ تقسیم به n
و همچنین زاویهٔ مرکزی یک کثیر الاضلاع منتظمه مساوی است
به ۳۶۰ تقسیم به n مثلاً زاویهٔ مرکزی یک مثلث
متساوی الاضلاع مساوی است به ۱۲۰ = $\frac{۳۶۰}{۳}$

(۵۰) در میان هر کثیر الاضلاع منتظمه میتوان دایرهٔ
کشید بطوریکه هر یک از اضلاع آن مماس باشند
بمحیط دایره

(۵۱) در هر دایره میتوان یک کثیر الاضلاع منتظمهٔ مطلق
کشید که عدد اضلاع آنرا هر چه مشخص بکنند کشیدنش
ممکن باشد باینطور که در مرکز دایره زاویهٔ احداث میکنند
که مساوی باشد بزاویهٔ مرکزی کثیر الاضلاع خواسته شده پس از
آن وتر را که حاصل میشود بقدری که آن کثیر الاضلاع ضلع دارد
در روی محیط دایره گذاشته اضلاع کثیر الاضلاع منتظمه معین میشود



فصل چهارم در خطوط متناسبه

(۵۲) (شکل ۴۷) اگر در یک مثلث مثلاً مثلث ABC
خط DE را بطوری بکشند که متوازی باشد با ضلع BC
این خط متوازی با دو ضلع دیگر بطور تناسب تقاطع میکند
و این تناسب حاصل میشود $AD : AE = BD : CE = AB : AC$
و بخصوص مثلث ADE با مثلث ABC

متشابه اند علت آنکه مثلث CDE مساوی است
بمثلث BED زیرا که قاعدهٔ آنها که خط ED
باشد یکی است و ما بین دو خط متوازی واقع شده اند
و همین طور است که مثلث $ADE = ABE + ...$
$EDA + CDE$ تا آنکه $CDA = AEB$
ولاکن سابق براین گفتیم مثلثاتیکه ارتفاعشان یکی است
مناسبتشان بایکدیگر مثل قاعدهٔ آنها است و چون ارتفاع
این سه مثلث که مثلث EDA و CDA
و CDE باشد یکی است پس این تناسب حاصل میشود

$AED : AE = EDC : CE = ACD : AC$

ولاکن هر سه مثلث EDA و EDB
و EBA نیز ارتفاعشان یکی است و این تناسب حاصل میشود

ABE

$AD : ADE = BD : BDE = AB : ABE$

اگر این دو تناسب را جمله بجمله ضرب کنند این تناسب حاصل میشود

$AD : AE = BD : CE = AB : AC$

(۵۳) بهمچنین اگر یک خط مثل ED با ضلعین AB
و AC بطور تناسب تقاطع کند لابد است که متوازی
باشد با ضلع BC

(۵۴) (شکل ۴۷) اگر مثلثین ABC و
abc باهم متشابه باشند اضلاع متشابهٔ آنها باهم
متناسب اند و بهمچنین اگر اضلاع مثلثین ABC
و abc باهم متناسب باشند آن دو مثلث متشابه اند
مثلثین abc و DEC باهم مساوی و متشابه اند
پس از این مابین دو مثلث متشابه که باهم مساوی نیند آنهم

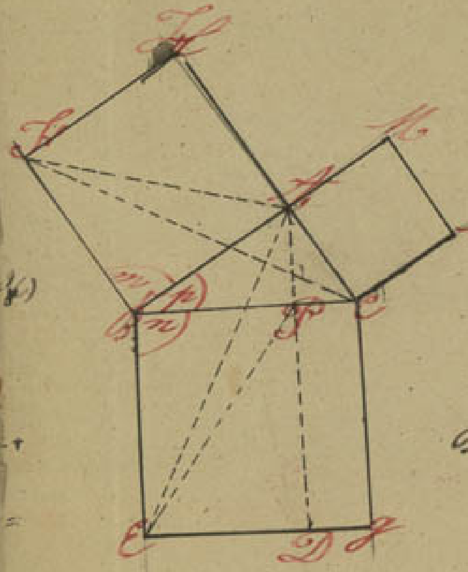
علامت گذاشته خواهد شد (∽) مثلاً اگر بخواهند
بنویسند که مثلث C D A با مثلث c ab
متشابه و مساوی‌اند باینطور می‌نویسند

c ab Δ ∽ C D A Δ



(۵۵) (شکل ۴۸) اگر در یک مثلث قائم الزاویه
از زاویهٔ قائمه عمودی بر وتر مثلث قائم الزاویه وارد
آورند دو مثلث قائم الزاویهٔ کوچک حاصل میشود که با یکدیگر
و با مثلث قائم الزاویهٔ بزرگ که بر دو مثلث کوچک [illegible]
متشابه میشوند بعلت اینکه خط D A عمود است بر
C B و مثلثها هر سه قائم الزاویه هستند و بخصوصه
زاویهٔ B در مثلث C A B و مثلث D A B
مشترک است و همچنین در مثلث C D A زاویهٔ

C



C با مثلث C A B مشترک است پس بطریق
اولا این سه مثلث با یکدیگر متشابه‌اند

(۵۶) (شکل ۴۹) در هر مثلث قائم الزاویه مربع
وتر C B مساوی است با مجموع مربعی دو ضلع دیگر A B
و C A باین طریق که مجذور $\overline{CA}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{CB}^2$
یا آنکه اگر فرض کنیم که $a = CB$ و $b = CA$ و $c = AB$
این تساوی حاصل میشود $b^2 + c^2 = a^2$

از برای ثابت نمودن این حقیقت لازمه در روی هر ضلع
مثلث قائم الزاویهٔ C A B یک مربع احداث میکنیم
و از نقطهٔ A عمود A D را بر E F وارد آوریم
و خطوط مستقیم [illegible] و
را رسم میکنند بعد بسهولت میتوان فهمید

که مربع اح اح اب اب مساوی است با مربع
حه ده اب بعلت آنکه مثلث اب حه
مساوی است بمثلث اب اح زیرا که اح حه
مساوی است اب اب و حه اب مساوی است حه اب
وزاویهٔ [illegible] بعلاوهٔ [illegible] مساوی است زاویهٔ [illegible]
بعلاوهٔ [illegible] ولکن مثلث اب حه اح مساوی است
بمثلث اب اح و مثلث [illegible] اب مساوی است
بمثلث [illegible] ده اب پس از همین قرار مثلث اح
اب اب مساوی است بمثلث [illegible] ده اب و دو
اب اح مساوی است بدو [illegible] ده اب پس ظاهر شد
که اب اح اح مساوی است به [illegible] ده ده اب
واز همین قرار اگر از نقطهٔ اب خطی بر نقطهٔ [illegible] بکشند

وازنقطهٔ

وازنقطهٔ اب بنقطهٔ [illegible] نیز خطی وارد آورند میتوان
بسهولت ثابت نمود که [illegible] [illegible] اب مساوی است
ده [illegible] و [illegible] بعلت آنکه مربع اح اب مساوی است
بمربع ده اب و مربع [illegible] مساوی است بمربع مستطیل
ده [illegible] پس اح اب بعلاوهٔ [illegible] مساوی است
ده [illegible] بعلاوهٔ ده اب پس مجذور [illegible] اب بعلاوهٔ
مجذور [illegible] اب مساوی است مجذور [illegible] اب و از این رو
حقیقت که یک مربع وتر مثلث قائم الزاویه مساوی است
بجمع مربعین دو ضلع دیگر و دیگر در دو مثلث متشابه
اضلاع متشابه با یکدیگر متناسب میباشند و این عمل نیز
منفعت عمیقی داشته که از آنها نتیجه میشوند بسبب های
تامی در علم ریاضی بواسطهٔ تناسبها زیاده از حد که از او

حاصل میشود

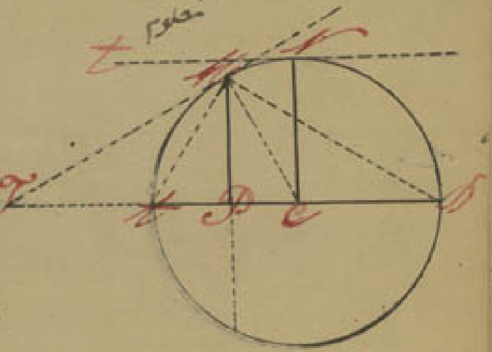
(۵۷) و همچنین اگر در یک مثلث معلوم شود که مربع یکی از
اضلاع آن مساوی است مجموع مربعین دو ضلع دیگر را لابد است
که آن مثلث قائم الزاویه باشد

(۵۸) از تساوی $\text{مع}^2 + \text{ما}^2 = \text{مه}^2$ این تساوی حاصل میشود
$\text{مه}^2 - \text{مع}^2 = \text{ما}^2$ و $\text{مه}^2 - \text{ما}^2 = \text{مع}^2$ پس اگر در یک مثلث
قائم الزاویه بخواهند وتر را مشخص نمایند این تساوی
حاصل میشود $\sqrt{\text{مع}^2 + \text{ما}^2} = \text{مه}$ و در مشخص کردن
ضلعین دیگر این دو تساوی حاصل میشود $\sqrt{\text{مه}^2 - \text{مع}^2} = \text{ما}$
و $\sqrt{\text{مه}^2 - \text{ما}^2} = \text{مع}$ مثلاً اگر ضلع ما مساوی باشد به ۳
و ضلع مع مساوی باشد بچهار از برای مشخص نمودن وتر این
تساوی حاصل میشود $\text{مه} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

ضلعها

ضلعیکه با یکدیگر مناسبت دارند مثل نسبت سه و چهار و پنج باشند همیشه
یک مثلث قائم الزاویه میشود غیر از این اعداد اعداد دیگر نیز هستند که اگر
اضلاع مثلث مساوی باشند با آنها همین خاصیت را دارد که گذشت دیده شد
مثل اعداد پنج و دوازده و سیزده بعلت اینکه $(5)^2 + (12)^2 = (13)^2$
و همین حالت را دارند جمیع اعداد دیگر مضروب سه و چهار و پنج باشند مثلاً
م×۳ و م×۴ و م×۵ اگر بخواهند وتر یک مثلث قائم الزاویه را
در حالتیکه دو ضلع دیگرش ... و ... داده شده باشند
پیدا کنند آن دو ضلع را بر یکدیگر عمود میکنند و پس از آن از منتهی
الیه آنها خط مستقیمی میکشند و آن خط وتر مثلث قائم الزاویه
میشود و اگر وتر و یک ضلع دیگر مثلث قائم الزاویه معلوم باشند
از برای پیدا کردن ضلع دیگر آن یک خط مستقیم مطلق میکشند
و ضلع معلوم را بر منتهی الیه آن عمود میکنند و پس از آن خط

و تر را بر منتهاالیه ضلع میگذارند در هر جا که با خط کشیده شده
تقاطع کرد ضلع دیگر مثلث قائم الزاویه حاصل میشود



(۵۹) (شکل ۵۰) اگر از یک نقطه در روی محیط دایره عمودی
بر قطر وارد آورند این عمود وسط متناسبه میشود ما بین دو خطیکه از تقاطع
عمود با قطر حاصل شده است یا نتیجه $AP : PM = PM : PB$
یا $\overline{PM}^2 = AP \times PB$ بعلت اینکه زاویهٔ
AMB مساوی است بنود درجه و مثلث AMP
PMB متشابه است بمثلث BPM
پس $AP : PM = PM : PB$
یا $\overline{PM}^2 = AP \times PB$ اگر فرض کنیم که نصف
قطر AC مساوی است r پس AB مساوی میشود
$2r$ و همچنین فرض میکنیم $AP = x$ و PB
مساوی

مساوی میشود $AB - AP$ یا مساوی است به
$2r - x$ و اگر PM را فرض کنیم که مساوی است به y آنها
تساوی حاصل میشود $y^2 = x(2r-x) = 2rx - x^2$
از این تساوی معلوم میشود که در هر دایره مربع عمود PM مساوی است
با حاصل ضرب خطین که از تقاطع عمود با قطر حاصل میشود این
تساوی را تساوی دایره مینامند زیرا که بواسطه آن خصایص
دایره معلوم میشود خط AP را آبسیس مینامند
abscisse و خط PM را اوردونات
ordinate میگویند و این دو خط تنها مخصوص
دایره نیستند بلکه در همه خطوط منحنی وجود دارند از برای مشخص
کردن یک نقطه مطلق در روی خط منحنی مثلاً نقطه M را از بالای
آن نقطه منحنی خط مستقیم میکشند و در روی آن خط مستقیم نقطه را

معین میکنند مثل نقطهٔ M که مبدء خط آبسیس میشود
و از نقطهٔ M عمودی بر آن وارد می‌آورند و طول این خط که از وسط
خط منحنی کشیده شده است معین است پس از آنکه نقطهٔ M
مشخص شد خط Pm و MP را باندازهٔ معین
میکنند خط Om را که طولش نامعین است خط
آبسیس مینامند و نقطهٔ m را مبدء آبسیس مینامند و خط
MP را اوردینات عمود از نقطهٔ M مینامند و خط
Pm را آبسیس خط منحنی تا نقطهٔ M میگویند
(۶۰) اگر فرض کنیم $x = Pc$ و این در حالتی است که مبدء
خط آبسیس از مرکز باشد این تساوی حاصل میشود
$AP = a - x$ و $PB = a + x$ پس
$y^2 = (a-x)(a+x) = a^2 - x^2$

و $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$ و این تساوی بواسطهٔ مثلث cMP
cP آشکار و معلوم است و این تساوی را تساوی دایره
میگویند و از علامات ($\pm$) معلوم میشود که هر خط آبسیس را
دو اوردینات است یکی از بالا و دیگری از زیر
(۶۱) اگر در روی نقطهٔ M از خط اوردینات MP مماس
MT را بکشند و اگر خط آبسیس cP را امتداد بدهند تا آنکه
با خط مماس تقاطع کند خطیکه مابین نقطهٔ تقاطع و خط اوردینات
باشد مثل خط PT آنرا sub tangeant
سوب تانژانت میگویند و در این دایره سوبتانژانت PT
مساوی است $\frac{y^2}{x}$ بعلت آنکه در مثلثین متشابهین TPM
PM و cMP این اربعه متناسب هست
$Pc : PM = PM : PT$ پس

$$PT = \frac{PM^2}{P\,c} = \frac{y^2}{x} = \frac{\dots - \dots}{x} = \frac{\dots}{x} - x$$

اگر فرض کنیم ۰ = x سبتانژانت مساوی بـ ص = ...

یعنی در این صورت سبتانژانت الاخیر النهایه بزرگ میشود و این بدیهی است بعلت اینکه خط تماس بخط آتنی پس در اینحالت متوازی میشود

(۶۲) کثیر الاضلاع متشابه آنکثیر الاضلاعها را گویند که عدد اضلاع و زوایای آنها باهم مساوی باشند و از این نتایج مفصله ذیل حاصل میشود

اولاً جمیع کثیر الاضلاعهای منتظمه که از یکجنس باشند باهم متشابه هستند

ثانیاً هر ضلع یک کثیر الاضلاع با هر ضلع کثیر الاضلاع دیگر متناسب میشود اگر آندو کثیر الاضلاع متشابه باشند ثالثاً نسبت محیط یک کثیر الاضلاع بمحیط کثیر الاضلاع دیگر مثل نسبت یک ضلع متشابه کثیر الاضلاع اول است بضلع متشابه کثیر الاضلاع ثانی

(۶۳) نسبت محیط کثیر الاضلاعهای منتظمه از یکجنس بیکدیگر

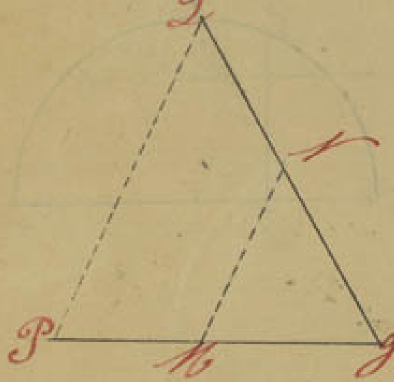
مثل نسبت نصف قطرهای دوایریست که در میان کثیر الاضلاع کشیده شده باشند یا کثیر الاضلاعها در میان دوایر واقع باشند

فصل پنجم

در مثالهای مختلفه در خصوص خطوط متناسبه

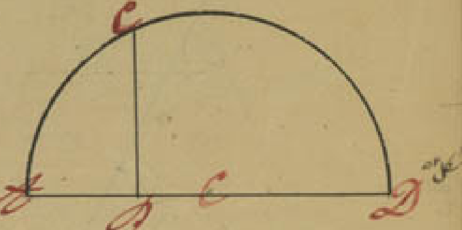
(۶۴) از برای ۳ خط داده شده خط a و b و c خط چهارم معلوم با این ها متناسب داشته باشد چگونه باید پیدا کرد (ج)

(شکل ۵۱) در روی ضلعین یک زاویه مطلق خط gM را میگیریم که مساوی است به a و خط gA که مساوی است b و خط gP را که مساوی است c و از نقطه M خط مستقیم تا نقطه A میکشیم و از نقطه P خط PQ را میکشیم که متوازی باشد به MA را این تناسب حاصل میشود



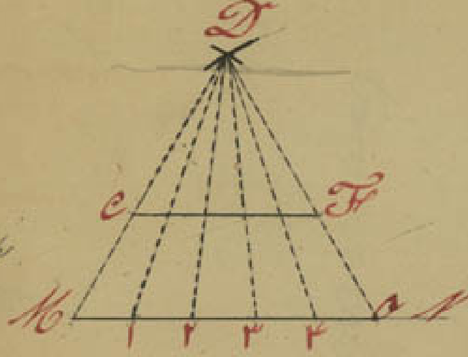
$$gQ = x = \frac{bc}{a}$$

واین خط مطلوب است اگر از برای دو خط داده شده خط متناسب
سیم را بخواهند پیدا کنند چگونه عمل مینمایند (ج) خط […]
را میگیرند که مساوی است به a و […] را که مساوی است
به b و همچنین […] را که مساوی است با a بعد خط […]
را میگیرند و همچنین خط […] را که متوازی آن باشد
[…] مساوی میشود به $\frac{b^2}{a}$



(۶۵) (شکل ۵۲) اگر بخواهند مابین خطین a و b
وسط متناسب پیدا کنند چگونه عمل مینمایند ج خط […]
را میگیرند که مساوی باشد به a و […] را میگیرند که
مساوی باشد به b پس از آن یک دایره احداث میکنند که
قطر آن خط […] باشد بعد از نقطه […] [illegible] […]
میکشند واین عمود وسط متناسب است که مابین a و b میخواهند

پیدا نمایند





پیدا نمایند باین طریق که $x = \sqrt{ab}$

(۶۶) (شکل ۵۳) اگر بخواهند خط مستقیم را بچندین
قسمت مساوی تقسیم نمایند چه قسم عمل مینمایند مثلاً خط […]
را بخواهند به پنج قسمت مساوی تقسیم نمایند (ج) یک خط
مستقیم مثل خط […] میکشند و از نقطه […] شروع
نموده پنج قسمت مساوی در روی خط […] نشان میکنند
ولاکن باید بقسمی نمود که از نقطه […] تا نقطه […] که منتهای الیه
قسمت پنج است بزرگتر از خط […] باشد بعد
در روی خط […] یک مثلث متساوی الاضلاع میکشند مثل
مثلث […] پس از آن خط […] را میگیرند
که مساوی است به […] و مساوی به […] است
بعد از نقطه […] تا قسمتهای یک و دو و سه و چهار خط میکشند

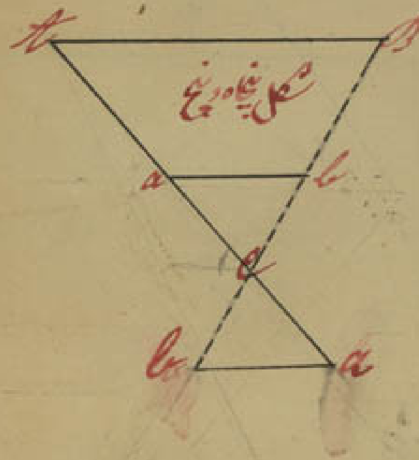
خط صح که مساوی است بخط ab بر پنج قسمت مساوی
تقسیم میشود

(۶۱) (شکل ۵۴) اگر بخواهند یک خط مستقیم را که طول او
پنج پوس باشد یا خط دیگر را که طول او هرچه خواهد باشد به پنج قسمت
مساوی تقسیم نمایند چگونه باید عمل نمود فرضاً اگر خطی را که پنج پوس
طول آن باشد بخواهند بهزار قسمت مساوی تقسیم نمایند که یکمقیاس
هندسی ساخته شود (ج) یک خط مستقیم ab رسم میکنند و از نقطه
a بسمت نقطه b ده نصف پوس یا ده قسمت مساوی
نشان میکنند و در نقطه a و b عمودهای ac و bd را
احداث میکنند و در روی این عمودها نیز بیک اندازه مطلق ده
قسمت مساوی نشان میکنند و از این قسمتها ده خط مستقیمی
میکشند که با یکدیگر و با خط مستقیم ab متوازی باشند

و در روی

و در روی خط cd همان ده نصف پوس را که در روی خط
خط ab نشان کرده بودند نشان میکنند و از آن نقطهها
خطوط عمودی بر ab وارد میآورند مثل خط ... وغیره
و همچنین خطوط ... را رسم میکنند و این خطوط را ابزار
فرانسه ترانس ورسال مینامند

(۶۲) اگر خط مستقیم در روی سطح زمین بقسمی واقع شده
باشد که جزو انتهای آن اجزاء دیگرش را اشوال نزدیک شده
و اگر بخواهند اندازهٔ آن خط را بگیرند بچه قسم باید عمل نمایند (ج)
(شکل ۵۵) در خارج آن خط که فرضاً خط ab باشد
یک نقطه مثلاً نقطهٔ c معین میکنند بقسمیکه از نقطهٔ c
تا نقطهٔ a و نقطهٔ b بتوان رفت بعد خط ac و bc
را اندازه میگیرند و از نقطهٔ c تا نقطهٔ e یک قسمتی از خط



ب ج میگذارند مثلاً دهم قسمت خط ب ج را میگیرند
دهم قسمت خط ک ج از نقطهٔ ج تا نقطهٔ [illegible] میگذارند پس
از آن خط [illegible] را اندازه میگیرند بعد ضرب میکنند به اندازهٔ
خط ک ج معلوم میشود

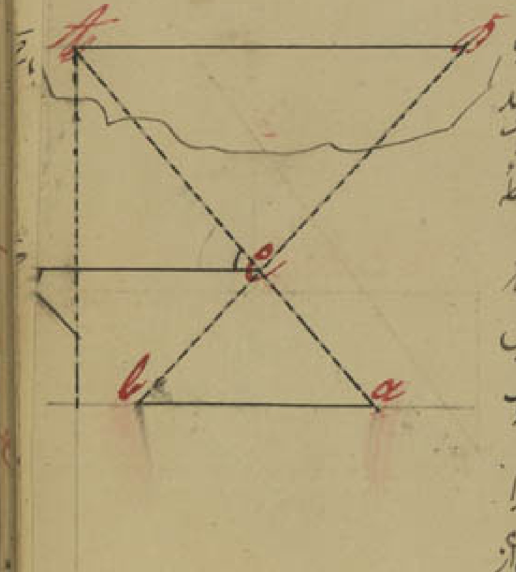
(۶۹) (شکل ۵۶) چگونه باید اندازه گرفت خط مستقیمی را
که در روی زمین بقسمی واقع شده است که جز یک انتهای آن
اجزاء دیگرش را نمیتوان نزدیک شد (ج) فرض میکنیم
که آن خط ک ج باشد از نقطهٔ ج عمود ج [illegible] را
با یک طول مطلق اخراج میکنیم بعد ج [illegible] را اندازه میگیریم
پس از آن [illegible] ج یا [illegible] ج را میگیریم که مساوی باشد چند
قسمت از ج [illegible] در نقطهٔ [illegible] یا [illegible] عمود [illegible] یا [illegible] را
وارد میآوریم پس از آن خط نظیر ج ک را امتداد میدهیم

تا آنکه



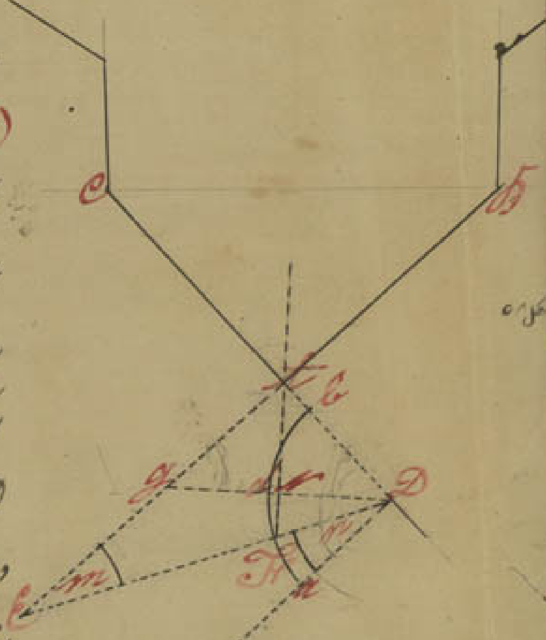
تا آنکه با عمود [illegible] یا [illegible] تقاطع کند پس از آن خط [illegible] یا [illegible] را
اندازه میگیریم هر چه عدد اندازه شد ضرب میکنیم بعدد قسمتهائیکه از خط
ج [illegible] برداشته بودیم حاصل ضرب مساوی میشود باندازهٔ خط ک ج

(۷۰) (شکل ۵۷) اگر بخواهند خطی را در روی زمین اندازه
بگیرند مثل خط ک ج که بهیچ وجه منتهاالیه اش را نتوان نزدیک شد
بهیچ قسم عمل مینمایند (ج) در خارج آن خط یک نقطه را مثل نقطهٔ
ج که در شکل پنجاه و پنج دیده شد فرض میکنند بعد خط ج ک
و ج [illegible] را اندازه میگیرند بقسمیکه خط ک ج را در شکل
پنجاه و ششم اندازه گرفتند بعد خط [illegible] ج را که مساوی است
چند قسمت از اقسام خط [illegible] ج و خط [illegible] ج را
میگیرند که مساوی است چند قسمت از اقسام ک ج پس از آن
خط [illegible] را اندازه میگیرند هر چه شد ضرب میکنند بعدد قسمتهائیکه



از خط ... یا ... برداشته بعد حاصل ضرب مساوی ... باندازهٔ
خط ...

(۷۱) اگر بخواهند یکزاویه را که بنزدیک آن نمیتوان رفت و ضلعی یک
آنرا میتوان امتداد داد بدو قسمت مساوی تقسیم نمایند بطریق ذیل
عمل میکنند مثلاً زاویهٔ باستیان ... را بخواهند از دور
بدو قسمت مساوی تقسیم نمایند (ج) (شکل ۵۱) در امتداد
هر یک از دو ضلع ... و ... دو نقطه معین میکنند مثل نقطهٔ
... و ... بقسمیکه از هر یک از این دو نقطه نقطهٔ دیگر را بتوان دید
و بعد پس از آن زاویهٔ ... را احداث میکنند که مساوی باشد
بزاویهٔ ... بعد زاویهٔ ... را بواسطهٔ خط ... بدو قسمت
مساوی تقسیم مینمایند و خط ... را امتداد میدهند تا نقطهٔ
... و پس از آن خط ... را اندازه میگیرند و در نقطهٔ ... بدو قسمت



ساوی

ساوی تقسیمش مینمایند و از نقطهٔ باستیان که ... باشد ...
... را ... میکنند که اگر آن خط را امتداد بدهند زاویهٔ باستیان را
که ... باشد بدو قسمت مساوی تقسیم مینماید

باب دویم

در خصایص و اقسام سطوح مستوی

فصل اول

در تعیین سطوح اشکالی که مرکب و منتهی بخطوط مستقیمه باشند

(۷۲) پیدا کردن سطح یک شکلیکه مرکب شده است از خطوط
مستقیمه بسته است بملاحظهٔ مفعول اینکه چند مرتبه این شکل
حاوی شکل دیگری است که آنرا واحد اندازهٔ سطوح قرار
گذاشته اند و این واحد همیشه مربعی است که ضلعش یک ... یک
یا یکپا یا یکقدم است (یک اصبع یا یکپا یا یک ذرع است)

بعض اوقات ضلع آن مربع واحد را یک لیبو یا یک فرسخ قرار میگذارند

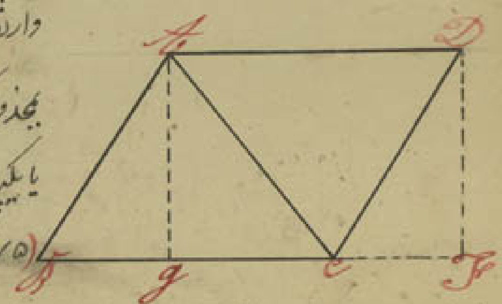
پس واحد اندازهٔ سطوح یکلیبوی مربع یا یکلیبو از مربع یا یک فرسخ مربع است یا یکپا مربع

(۷۳) اگر ضلع این مربع واحد که فرض شد باشد ۵ دفعه (فرض شده دفعه) در روی خط AD که قاعدهٔ مربع مستطیل ABCD است جا بگیرد و ۳ دفعه (فرض شده دفعه) در روی خط AB که ارتفاع آنست قرار بگیرد اندازهٔ آن مربع مستطیل این میشود ۱۵

۱۵ = ۵ × ۳ = 5×3

(۷۴) چونکه هر شکل مربع شکل یک مربع مستطیل است که قاعده و ارتفاعش با هم مساوی باشد پس اندازهٔ سطح یک مربع مساوی است بمجذور یک ضلع آن مثلاً سطح یک مربعی که ضلع آن دوازده پوس یا یکپا باشد این میشود

۱۴۴ = ۱۲ × ۱۲



(۷۵) (شکل ۶۵ و ۶۶) سطح یک شکل متوازی الاضلاع

مثل شکل

مثل شکل ABCD مساوی است $Ag \times Bc = Ah = AB \times Dc$

(۷۶) سطح یک مثلث مثل ABC مساوی است به $Ag \times Bc \times \frac{1}{2}$

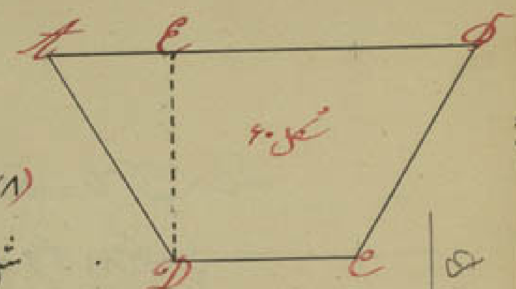
یا آنکه نصف حاصل ضرب قاعدهٔ آنست با ارتفاع آن بعلت اینکه

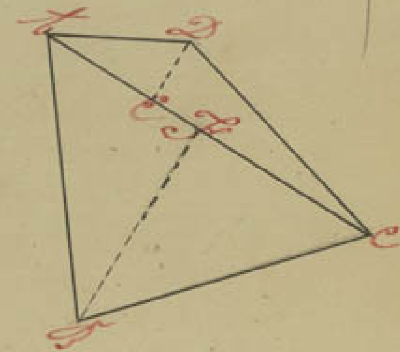
$Ag \times Bc \cdot \frac{1}{2} = ABCD \cdot \frac{1}{2} = ABC$

پس اگر سطح یک مثلث را تقسیم کنند به نصف قاعدهٔ آن خارج قسمت ارتفاع آن مثلث میشود و اگر تقسیم نمایند به نصف ارتفاع خارج قسمت قاعدهٔ آن مثلث میشود مثلاً اگر سطح یک مثلث ۴ + ۱۱ باشد و قاعدهٔ آن ۱ + ۴ باشد ارتفاع آنرا باین طور پیدا میکنند ۴۰۰ = ۴ + (۱۱ × ۳۶) = ۴ + ۱۱

و ۴۰۰ ؛ $\frac{۲۵}{۲}$ = ۴۰۰ × $\frac{۲}{۲۵}$ = ۱۶ × ۲ = ۳۲ = ۵ + ۲

(۷۷) سطح یک مثلث قائم الزاویه مساویست بحاصل ضرب ضلعینیکه عمود بر یکدیگر تقسیم بدو





(۷۸) (شکل شصت) سطح یک تراپز که ذوزنقه‌ئی باشد
مثل شکل ABCD مساویست $EB \times \frac{AD+BC}{2}$
پس سطح این شکل مساویست بنصف مجموع دو ضلع متوازیه
آن که ضرب شود بارتفاع آن که عبارت از فاصلهٔ مابین آن دو ضلع
(۷۹) (شکل شصت و یک) سطح هر ذو اربعة اضلاع مطلقی
مثل ABCD که آنرا بزبان فرانسه تراپوزوید میگویند
مساویست $AC \times \frac{DE+BF}{2}$ باین معنی
که سطح این شکل مساویست بحاصل ضرب خط دیاگونال AC
بانصف مجموع دو خط ارتفاع DE و BF
(۸۰) سطح یک کثیر الاضلاع منتظم مساویست بمحیط آن کثیر الاضلاع
که ضرب شود بنصف نصف قطر دایره ئیکه این کثیر الاضلاع
محاط است برآن

(۸۱) سطح یک کثیر الاضلاع منتظم را باین قسم نیز میتوان پیدا
کرد که آنرا منقسم نمایند بچند مثلث بعد سطح آن مثلثات را جمع
کنند حاصل جمع سطح آن کثیر الاضلاع منتظم خواهد بود
(۸۲) سطح یک دایره مساویست بنصف حاصل ضرب محیط دایره
بانصف قطر باین طریق که اگر فرض کنیم محیط دایره مساویست
C و نصف قطر مساویست R سطح دایره مساوی میشود بیک
$\frac{C \times R}{2}$ از برای اثبات این دایره را مثل یک کثیر الاضلاع
منتظم فرض میکنند که عدد اضلاع آن بی نهایت باشد در این
صورت اضلاع آن کثیر الاضلاع منتظم قطعاً محیط دایره میشود
و نصف قطر دایره ئیکه کثیر الاضلاع منتظم محاط است برآن
یعنیها نصف قطر دایرهٔ میشود که محاط است بکثیر الاضلاع منتظم
(۸۳) محیط دایره را همیشه باین نشان می نویسند (π)

واین را پیکر که میناسند و پیدا کردن این از روی یکقاعده مختصر
بسیار آسان نیست و همچنین از قاعده که در هندسهٔ اعلا ذکر
شده است نیز میتوان پیدا کرد و حاصل اینست که اگر قطر دایره را
یک فرض کنیم از برای پیکر که این پیدا میشود ۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵۳۶ = π

(۸۴) سطح یک قطاع دایره این طور معلوم میشود که طول قوس را
ضرب نمایند بنصف نصف قطر دایره و طول قوس را از این
اربعهٔ متناسبه میتوان معلوم نمود: قوس آن = ۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵۳۶ × a : [illegible]
واین در صورتی است که قطر یک فرض شده باشد و هم محیط دایرهٔ که
قطرش یک باشد

(۸۵) سطح یک قطعهٔ دایره باین طور معلوم میشود که سطح قطاع دایره را
معلوم نمایند و از او سطح مثلث را تفریق کنند

فصل دوّیم

در مناسبت

در مناسبت ما بین اشکال مرکب شدهٔ از خطوط مستقیمه و تبدیل آنها
بشکل دیگر

(۸۶) اگر فرض کنیم که قاعدهٔ یک مثلث مساوی است به [illegible]
و ارتفاعش مساوی است [illegible] و سطحش مساوی است
[illegible] این تساوی حاصل میشود [illegible] × ½ = [illegible] و از همین
قرار از برای یک مثلث دیگر این حاصل میشود [illegible] × a ½ = [illegible]
از اینجا این اربعهٔ متناسبه حاصل میشود [illegible] × a : [illegible] × [illegible] = [illegible] × a ½ : [illegible] × ½ = [illegible] : [illegible]
از اینجا معلوم میشود که نسبت سطح دو مثلث با یکدیگر مثل حاصل ضرب
قاعدهٔ آنها است با ارتفاعشان و هم از این قاعده نتایج مفصلهٔ
ذیل حاصل میشود اوّلاً دو مثلث که یک قاعده دارند نسبتشان
با یکدیگر مثل ارتفاع آنها است و همچنین دو مثلث که ارتفاعشان
یکی است نسبتشان با یکدیگر مثل قاعدهٔ آنها است اگر فرض

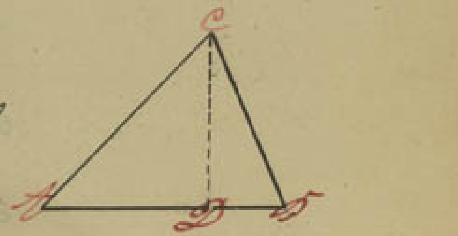
کنیم $b'a = x$ این اربعهٔ متناسبه حاصل میشود $a : x = b : b'$

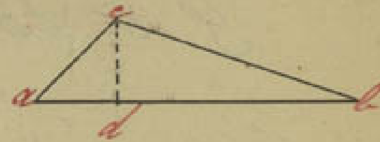
یا آنکه $x : a' = b : b'$ ثانیاً دو مثلث که یک سطح داشته

باشند نسبت ارتفاع آنها بایکدیگر مثل نسبت قاعدهای

آنها است باین طریق که اگر $x = b'$ اینست و حاصل میشود

$b \times a = x \times a' = a \times b$ پس $a' : a = b : b'$ ثالثاً





(شکل صد و ...) اگر دو مثلث را یکزاویهٔ متساویه باشد

نسبتشان بایکدیگر مثل حاصل ضرب دو ضلعیست که محیط

بر زاویهٔ متساویه هستند مثلاً اگر فرض کنیم که زاویهٔ $a' = a$

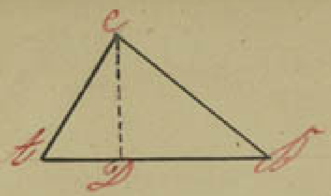
این اربعهٔ متناسبه حاصل میشود $a'b'c' : abc = a'b' \times a'c' : ab \times ac$

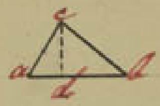
بعلت اینکه $a'b'c' : abc = a'b' \times c'D : ab \times cd = (a'b' : ab) \times (c'D : cd)$

لاکن چونکه مثلثین $a'c'D$ و acd متشابهاند این تناسب

حاصل میشود $c'D : cd = a'c' : ac$ پس

$(ab \times ac)$





$$a'b'c' : abc = (a'b' : ab) \times (a'c' : ac) = (a'b' \times a'c') : (ab \times ac)$$

رابعاً (شکل صد و ...) نسبت مثلثهای متشابهه بایکدیگر

مثل نسبت مجذور یا مربع اضلاع متشابههٔ آنها است باین طریق که

$$a'b'c' : abc = \overline{a'c'}^2 : \overline{ac}^2 = \overline{a'b'}^2 : \overline{ab}^2 = \overline{b'c'}^2 : \overline{bc}^2 = \overline{c'D}^2 : \overline{cd}^2$$

بعلت اینکه $a'b'c' : abc = a'b' \times c'D : ab \times cd = (a'b' : ab) \times (c'D : cd)$

ولاکن چونکه $c'D : cd = a'b' : ab$ است

تناسب حاصل میشود $a'b'c' : abc = (a'b' : ab) \times (a'b' : ab) = \overline{a'b'}^2 : \overline{ab}^2$

و چونکه $a'b' : ab = a'c' : ac = b'c' : bc = c'D : cd$

این حاصل میشود $a'b'c' : abc = \overline{a'c'}^2 : \overline{ac}^2 = \overline{a'b'}^2 : \overline{ab}^2 = \overline{b'c'}^2 : \overline{bc}^2 = \overline{c'D}^2 : \overline{cd}^2$

خامساً آنچه گفته شد در شکل متوازی الاضلاع نیز صادق آید زیرا که

هر متوازی الاضلاع مرکب است از دو مثلث که قاعده و ارتفاعشان یکی است

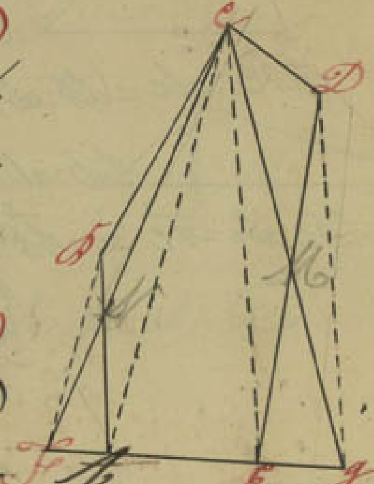
(۸۷) نسبت سطح کثیر الاضلاعهای متشابهه بایکدیگر

شکل مجذور یا مربع اضلاع متشابهه آنهااست

(۸۸) نسبت سطح کثیر الاضلاع های منتظمه از یک جنس شکل مجذور اضلاع آنهاو شکل مجذور نصف قطر و شکل مجذور قطر دایره ایست که در در کثیر الاضلاع منتظمه مندرج باشد و همچنین نسبت سطوح دوایر نیز با یکدیگر شکل مجذور نصف قطر آنها است

(۸۹) اگر در روی اضلاع یک مثلث قایم الزاویه اشکال متشابهه رسم بکنند مثلا مثلث های متشابهه بسازند یا نصف دایره بکشند شکلیکه در روی وتر مثلث قایم الزاویه کشیده شود مساوی است بمجموع شکلینی که در روی ضلعین محیط بزاویه قائمه ساخته شده است

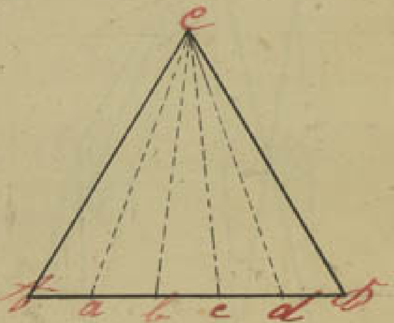
(۹۰) در مثالهای چندی که مناسب قواعد مذکوره اند اولا (شکل شصت و چهار) در تبدیل شکل کثیر الاضلاع بشکل دیگر مثلا اگر بخواهند کثیر الاضلاع eDcEgh را



بتبدیل

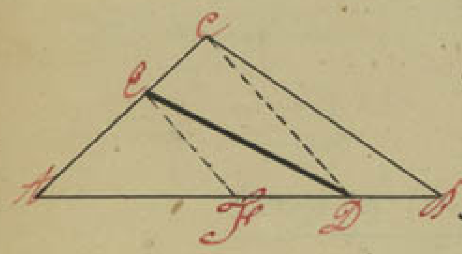
تبدیل بمثلث نمایند که سطحش مساوی باشد بسطح کثیر الاضلاع از برای این دیاگونالهای hc و ec را کشیده و خط hf متوازی به ec و Dg را متوازی به ec میکنند پس از آن معلوم میشود که مثلث ecf مساوی است بمثلث ecD و همچنین مثلث ecg مساوی است بمثلث ecE پس از انجا فهمیده میشود که سطح مثلث efg مساوی است بسطح کثیر الاضلاع eDcEgh ثانیا در تبدیل کردن یک مثلث بمربع که قاعده اش a و ارتفاعش h باشد بیک مربع که سطحش مساوی باشد بسطح مثلث بجهت این فرض میکنیم ضلع مربع x باشد پس از برای سطح مربع این تساوی حاصل میشود $x^2 = \frac{1}{2} a \times h$ و $x = \sqrt{\frac{1}{2} a \times h}$

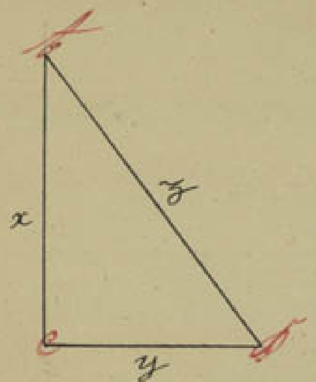
پس میباید مابین یک قایم a و b یا مابین یک قایم ab
و a یک وسط مشابه پیدا کنیم که مساوی باشد بضلع مربع
خواسته شده تا اشاده تبدیل کردن یکدایره بمربعی که سطح آن
مساوی باشد جهت این فرض میکنیم که نصف قطر دایره
a باشد پس سطحش یکدفعه ... میشود و ضلع مربع مطلوب
مساوی میشود به ... پس در این صورت $= \frac{1}{2} a$ ... پس
از برای این میباید یک خط مستقیم کشید که مساوی باشد به
نصف ... که محیط دایره است و مابین نصف ... که
محیط دایره باشد و a که نصف قطر باشد یک وسط مشابه
پیدا کنیم و آن وسط مشابه ضلع آن مربع میشود ابداً
(شکل شصت و پنج) در تقسیم کردن یک مثلث مثلاً مثلث
c ... یکدفعه به پنج قسمت مساوی و یکدفعه بدو قسمت



که نسبتشان

که نسبتشان با یکدیگر مثل نسبت ... باشد به ۳ از برای این
قاعده مثلث را که ... باشد به پنج قسمت مساوی تقسیم
میکنیم و از نقطه راس مثلث که نقطه c باشد بهر یک از آن
قسمتها خط میکشند و پنج مثلث حاصل میشود که مثلث c
ab و cab و cbc و ccd و cd
باشد هر یک از این مثلثها با یکدیگر مساوی‌اند و همچنین نسبت
مثلث ... به مثلث ... مثل نسبت ۲
به ۳ خواستها (شکل شصت و شش) در تقسیم کردن یک مثلث
مثلاً مثلث c ... بواسطه خط ... D که از نقطه
معینی کشیده شده D کشیده شده است بدو قسمت مساوی
از برای این فرض میکنیم که a = ... و c = D ...
و b = ... و x = ... از این تناسب حاصل میشود





$x^2+y^2+2xy=4b^2-4bz+z^2$

$x^2+y^2=z^2$

$2xy=4b^2-4bz$

$2xy=4A$

$0=4b^2-4bz-4A$

$4bz=4b^2-4A$

$x=\overline{ca}$ و $y=\overline{cb}$ و $z=\overline{ab}$ را باید بدید

که (شکل شصت و هفت) I در اینجا اینز ۳ تساوی II حاصل میشود III

$A=\frac{xy}{2}$ و $x+y+z=2b$ و $x^2+y^2=z^2$ IV

از تساوی دوم اینز حاصل میشود $x+y=2b-z$ و مجذور

اینز مساویست $x^2+2xy+y^2=4b^2-4bz+z^2$

و تساوی سیم را با چهار برابر تساوی اول که تفریق بشوند

از تساوی نوشته شده و باقی تقسیم بشود بچهار اینز حاصل میشود

$$\frac{x^2+2xy+y^2-(x^2+y^2)-(4\times\frac{xy}{2})}{4}=\frac{4b^2-4bz+z^2-(z^2)-4A}{4}$$

و پس از برداشتن قوسها چنین میشود

$$\frac{x^2+2xy+y^2-x^2-y^2-2xy}{4}=\frac{4b^2-4bz+z^2-z^2-4A}{4}$$

و پس از اختصار دادن بطرفین تساوی اینز حاصل میشود

$\frac{4b^2-4bz-4A}{4}=0$ یا آنکه $b^2-bz-A=0$

$ACD : ACB = AC\times AD : AC\times CB = cx : ab$

و همچنین $ACD : ACB = 1:2$

پس $cx : ab = 1:2$ و $x=\frac{ab}{2c}$

AB را در نقطهٔ D بدو قسمت مساوی تقسیم میکنیم و خط

DC را استوار از C میکشیم اینز تناسب حاصل میشود

$AD : AC = AT : CD$ یا آنکه

$\frac{1}{2}a : x = c : b$ و $x=\frac{ab}{2c}$ پس باینز

طریق نیز که عمل هندسه باشد میتوان نقطهٔ C را پیدا کرد

و از آن نقطه خطی بنقطهٔ D کشید که مثلث ABC را

بدو قسمت مساوی تقسیم نماید مساوات فرض میکنیم که سطح

یک مثلث قائم الزاویه مساویست به ... و نصف مجموع سه

ضلع آن که نصف محیط آن باشد مساویست ... و بعلاوه

پس $bz = b^2 - h$ و

$z = \frac{b^2 - h}{b} = b - \frac{h}{b}$ لکن اگر از تساوی

سیم چهار مرتبه تساوی اول را تفریق نمایند این حاصل میشود

$x^2 + y^2 - 4\left(\frac{xy}{2}\right) = z^2 - 4h$ یا آنکه

$x^2 - 2xy + y^2 = z^2 - 4h$ یا آنکه

$(x-y)^2 = b^2 - 2h + \frac{h^2}{b^2} - 4h = b^2 - 6h + \left(\frac{h}{b}\right)^2$

پس $x - y = \sqrt{b^2 - 6h + \left(\frac{h}{b}\right)^2}$ و در تساوی

چهارم این است $x + y = 2b - z$ یا آنکه

$x + y = 2b - b + \frac{h}{b} = b + \frac{h}{b}$

و از این دو تساوی آخر این پیدا میشود

$y = \frac{1}{2}\left(b + \frac{h}{b} - \sqrt{b^2 - 6h + \left(\frac{h}{b}\right)^2}\right)$ و

$x = \frac{1}{2}\left(b + \frac{h}{b} + \sqrt{b^2 - 6h + \left(\frac{h}{b}\right)^2}\right)$

فرض میکنیم

فرض میکنیم $h = ۶$ و محیط مثلث $۱۲ = 2b$

پس $b = ۶$ و این حاصل میشود $\frac{h}{b} = ۱$ و

پس $\sqrt{۳۶ - ۳۶ + ۱} = ۱$ پس $x = \frac{1}{۲}(۶+۱+۱) = \frac{۸}{۲} = ۴$

و $y = \frac{1}{۲}(۶+۱-۱) = \frac{۶}{۲} = ۳$ و $z = ۵$

فصل ششم در وضع و مقامات و حالات سطوح

(۹۱) سابقاً در ابتدای کتاب مذکور شد که سطح مستوی عبارت از آن سطحی است که اگر دو نقطه مثلاً نقطهٔ … در او فرض شود و از یکی از آن نقطه‌ها خطی تا نقطهٔ دیگر کشیده شود تمام آن خط در سطح مندرج شده از او خارج نشود هر سطحی را در خیال هر قدر که بخواهند میتوان امتداد داد الی غیر النهایه از جمله خصایص سطوح که معرفت آنها الزم و اهم است اینست اولاً ممتنع است

که یک خط مستقیم در روی سطح مستوی قرار گرفته شود
بقسمیکه بعض از آن در سطح باشد و بعض دیگر خارج از سطح
باشد ثانیاً اگر یک خط مستقیم را با یک سطح مستوی دو نقطهٔ
مشترک باشد آن خط بتمامه در آن سطح مندرج است ثالثاً
یک مثلث باید بتمامه در سطح مستوی مندرج شود اگر یک جزء
آن مثلث در سطح مندرج باشد

(۹۲) سه نقطه که در امتداد خط مستقیم واقع نباشند وضع
یک سطح را معین مینماید و در آن سه نقطه زیاده از یک سطح نمی توان
وضع نمود و بالعکس سه نقطه که در امتداد یک خط مستقیم
واقع شده باشند از آنها الی غیر النهایه سطوح میتوان گذراند

(۹۳) بدیهی است آنکه دو خط مستقیم که باهم تقاطع
کنند باشند در روی یک سطح واقعند یا آنکه از دو خط مستقیم

که باهم

که باهم تقاطع کنند باشند نمیتوان گذراند مگر یک سطح

(۹۴) وقتیکه یک خط مستقیم واقع شده باشد بسطحی که عمود
باشد بجمیع خطوطی که از نقطهٔ وقوع آن خط بگذرد در آن
حالت آن خط عمود میشود بر آن سطح

(۹۵) وقتیکه دو خط با یکدیگر تقاطع کنند باشند و خط
دیگر در نقطهٔ تقاطع بر آنها عمود شود عمود میشود بر جمیع خطوطی
که از آن نقطه بگذرد و همچنین عمود میشود بر سطحی که آن دو خط
در آن سطح واقعند

(۹۶) از یک نقطه که در خارج سطح واقع است نمیتوان
زیاده از یک عمود بر آن سطح وارد آورد

(۹۷) از یک نقطه که در روی سطح فرض شود زیاده از یک عمود
نمیتوان احداث نمود

(۹۸) خط عمود کوتاه تر است از جمیع خطوطیکه بسطح وارد آورده میشوند

(۹۹) از یک نقطه که در خارج سطح است اگر بخواهند از آن نقطه عمودی بر سطح وارد آورند ریسمانی را گرفته یک سر آنرا در آن نقطه قرار میگذارند و با سر دیگر ریسمان ۳ نقطه در روی سطح نشان میکنند و از این ۳ نقطه دایره میگذرانند از نقطه داده شده خطی تا مرکز دایره میکشند و آن خط عمود میشود بسطح

(۱۰۰) محل تقاطع دو سطح یک خط مستقیم است

(۱۰۱) اگر دو سطح با هم تقاطع کنند عمود باشند و از هر یک از آن سطحین عمودی بر خط تقاطع آنها وارد آورند بقسمیکه آن دو عمود در خط تقاطع بیکدیگر برسند در نقطه که آن دو عمود بهم میرسند زاویه حاصل میشود که آنرا زاویه تمایل سطحین مینامند وقتیکه زاویه تمایل سطحین مساوی باشد

بر نود درجه

بر نود درجه دلیل است بر اینکه آن دو سطح عمود اند بیکدیگر

(۱۰۲) اگر دو سطح که با هم تقاطع کنند هم اند عمود شوند بسطح دیگر خط تقاطع آنها نیز عمود میشود بر آن سطح

(۱۰۳) دو سطح با هم در وقتی متوازی میشوند که جمیع خطوط عمود که ما بین آن دو سطح واقعند با هم مساوی باشند

(۱۰۴) اگر با دو سطح متوازی یک سطح دیگر تقاطع کند خطوط تقاطع آنها نیز با هم متوازیند

باب سیم

در اندازه مکعب اجسام منتظمه که آنرا بزبان فرانسه لاستره ومتری میگویند

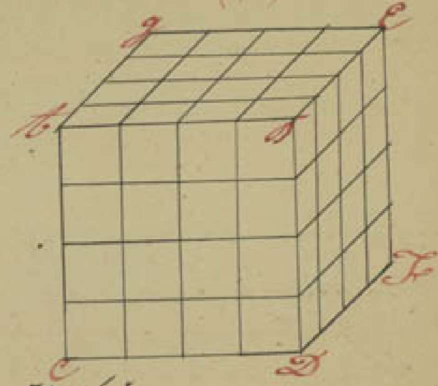
la stireometrie

فصل اول

در اندازه مکعب اجسام

(۱۰۵) در ابتدای علم مساحت ذکر شد که هر جسم را سه بعد هست

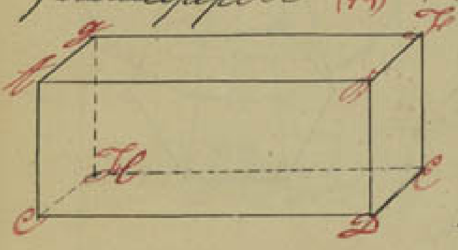
(۶۸)



هر یک از خطین

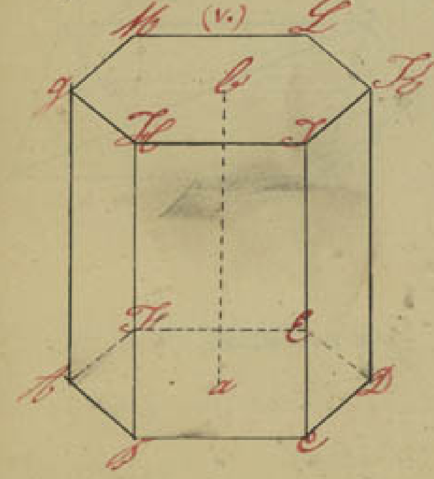
که عبارت از طول و عرض و عمق باشد چنانچه در (شکل ۶۸)
دیده میشود از برای پیدا کردن اندازهٔ این جسم مکعب چنان تصور
میکنیم که هر ضلع اطراف آن چهار پوس باشد آنوقت بآسانی
معلوم میشود که اگر AB و BC را بچهار پوس تقسیم نمائیم
در سطح ABCD شانزده پوس مربع حاصل
میشود و لاکن چنین در سطح DF ... چهار صف
از اجسام هست که هر یک از آنها مساوی است بشانزده پوس
مربع که در سطح ABCD هست پس واضح است
که میباید شانزده را بچهار ضرب نمود یا آنکه چهار را ضرب نمود بچهار
و باز بچهار تا آنکه چهار اکس پوزان ۳ حاصل شود که شصت و چهار پوس مکعب است
و این اندازهٔ مکعب این جسم مکعب است
که ضلع هر سطح آن مساوی بود بچهار پوس

parallelipipède (۶۹)



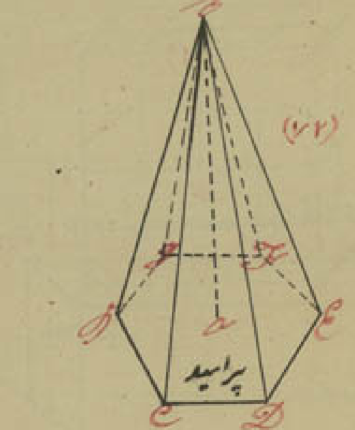
prisme

(۷۰)



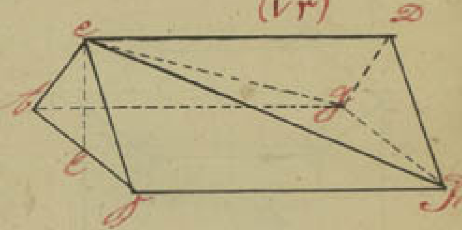
(۱۰۶) از اینجا آشکار میشود که اجسام را نمیتوان اندازه گرفت
مگر با اجسام و اندازهٔ مکعبهٔ جسم را نسبتی با ابعاد ثلاثهٔ آن هست
(۱۰۷) (شکل ۶۹) پارالیلیپیپد جسم منتظم را گویند
که مرکب باشد از شش سطح و عمود باشند بر یکدیگر و هر دو سطح
متوازی آن با هم مساوی باشند کروشی اندازهٔ مکعب این مجسم
بقسمی است که در نمرهٔ سابق ذکر شد باید یعنی که میباید ابعاد
ثلاثهٔ آنرا بیکدیگر ضرب نمود مثلاً فرض میکنیم CD = ۶
و ۲ = BC و ۳ = CH = BG اندازهٔ
مکعب این جسم مساوی میشود ۳۶ = ۳ × ۲ × ۶
(۱۰۸) (شکل ۷۰) پریسم مجسم را گویند که مرکب باشد
از دو کثیر الاضلاع منتظم متوازی و در آن بقدر مربع مستطیل
باشد که در آن کثیر الاضلاع اضلاع هست قاعده کروشی اندازهٔ

آن بانظور است که سطح قاعدهٔ آنرا که کثیر الاضلاع ABC
DEF است تحقیق میکنند هرچه حاصل شد
بارتفاع آن که GH است یا AG باشد ضرب
مینمایند و حاصل ضرب اندازهٔ مکعب پرزم میشود پس خطیکه
از مرکز یکی از این کثیر الاضلاع بمرکز دیگری کشیده شود آنرا
محور پرزم نامند مثل خط GH و این خط نیز ارتفاع پرزم است
(۱۰۹) (شکل ۷۱) سیلندر مجسمی را گویند که مرکب
باشد از دو دایرهٔ متوازیه و از یک سطح مدور یا عبارت است از
پرزمی که عدهٔ اضلاع کثیر الاضلاع آن بی نهایت باشد پس نسبت
اندازهٔ مکعب آن باین طور معلوم میشود که سطح دایرهٔ قاعدهٔ آنرا
بارتفاع یا محور آن که ab باشد ضرب نمایند
(۱۱۰) (شکل ۷۲) پیرامید مجسمی را گویند که شکل



cilindre

(۷۳)

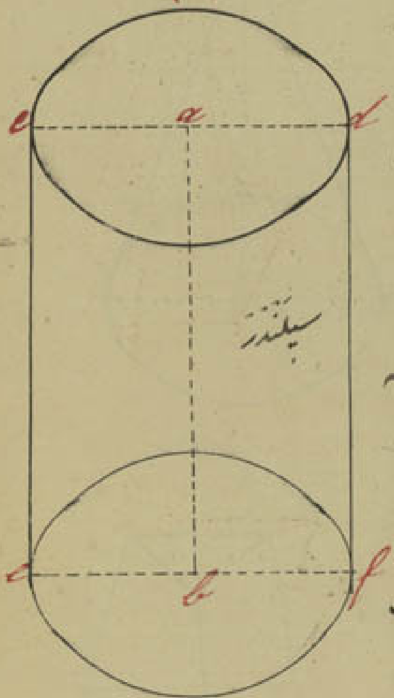


piramide

مخروطی باشد

مخروطی باشد و قاعدهٔ آن شکل یک کثیر الاضلاع یا یک مثلث
باشد و مرکب باشد از آنقدر مثلث که در کثیر الاضلاع
قاعدهٔ آن ضلع بهم میرسد خط af را که از نقطهٔ راس
آن تا مرکز کشیده اند ارتفاع یا محور پیرامید نامند اندازهٔ
مکعب آنرا باین قسم میگیرند که قاعدهٔ آنرا ضرب مینمایند به
ارتفاعش و حاصل ضرب را تقسیم به ۳ مینمایند بدلیل اینکه
بدیهی است که اندازهٔ مکعب یک جسم مخروطی ثلث پرزمی است
که با این قاعده و ارتفاع آن و لاکن میباید یک عدهٔ کثری
پیدا کرد که با آن حاصل ضرب قاعده و ارتفاع جسم مخروطی را
ضرب نمود تا اندازهٔ مکعب آن حاصل شود و جهت نمودن این
مطلب یک پرزم عمود میگیرند (شکل ۷۳)
و چنان تصور میکنیم که بواسطهٔ سطح ACF و E

(۷۱)

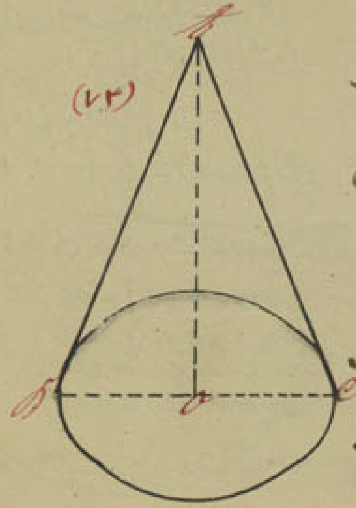


آن پریسم را بدو جسم مخروطی تقسیم میکنیم که یکی bD
c ... باشد و یکی b ... و فرض مینمائیم
که ضلع a = ... و ارتفاع h = ... و ضلع c = cD
و کثیرا معلوم مساویست ... اندازهٔ مکعب پریسم
$\frac{abc}{2}$ = ... D ... و مساویست بمخروطی
c ... + ... D از این
قرار اندازهٔ مکعب جسم مخروط اول مساویست $h \times \frac{abc}{2}$
و مخروط دویم مساویست $h \times abc$ از انجا این تساوی
حاصل میشود $\frac{abc}{2} = h \times \frac{abc}{2} + h \times abc$
پس $\frac{abc}{2} = h\left(\frac{abc}{2} + \frac{2abc}{2}\right)$ پس اگر
جملهٔ میان پارانتیز را جمع نمائیم این حاصل میشود
$\frac{abc}{2} = 3 \times \frac{abc}{2} \times h$ پس $h = \frac{1}{3}$

از انجا

از انجا معلوم میشود که بجهت گرفتن اندازهٔ مکعب یک جسم مخروطی
میباید اندازهٔ قاعدهٔ آنرا با ارتفاعش ضرب نمود و حاصل را
تقسیم نمود به ۳

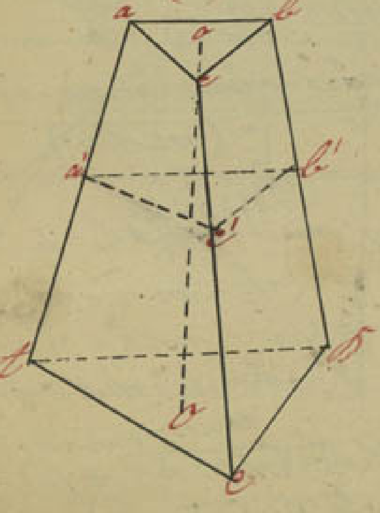
(۷۴)



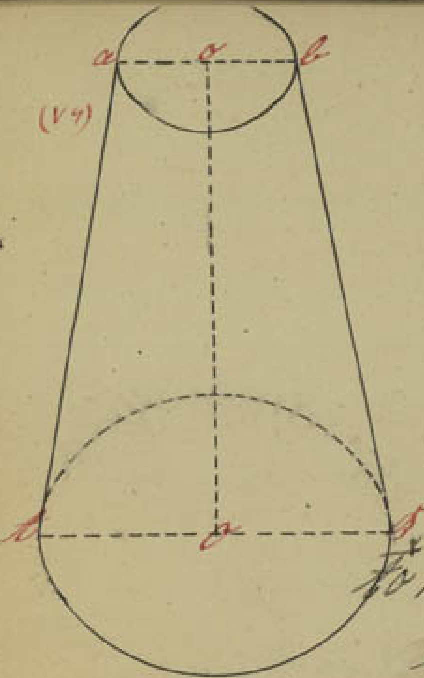
(۱۱۱) (شکل ۷۴) مخروط قائم که بزبان فرانسه
کون cône میگویند جسمی است که قاعدهٔ آن دایره
و سطح محیطش مدور است یا آنکه میتوان گفت که این جسم هرمی است
که قاعدهٔ آن کثیر الاضلاع منتظم است که عدد اضلاع
آنرا نهایتی نباشد و گرفتن اندازهٔ آن باین طریق است که باید
سطح قاعدهٔ آنرا به ثلث ارتفاعش ضرب نمود مثلاً اگر
اندازهٔ مکعب این جسم را c تصور کنیم این تساوی حاصل
میشود $c = \overline{oc}^{2}\,\pi \times \frac{\overline{ho}}{3}$

(۱۱۲) (شکل ۷۵) اهرام مقطوع که بزبان فرانسه

(۷۵)



(۷۶)

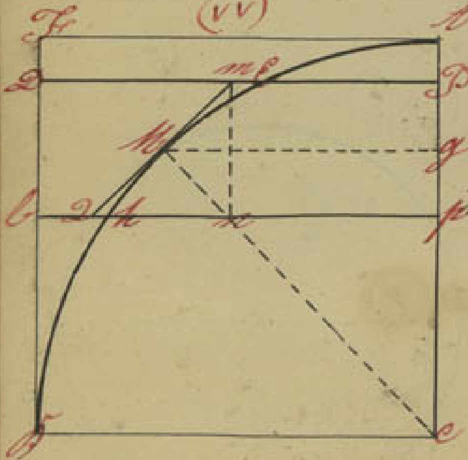


$$\text{حجم مخروط} = \frac{ق + ب + \sqrt{ق\,ب}}{۳} \times [illegible]$$

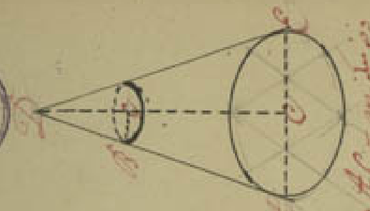
(۱۱۳) (شکل ۷۶) اندازهٔ مکعب مخروط قائمیکه راسش قطع شده باشد و دایره‌ایکه از انقطاع راسش حاصل شده است با دایرهٔ قاعدهٔ آن متوازی باشد بنا بر آنچه که در اهرام مقطوع ذکر شد باین طریق که اگر فرض کنیم ق = π [illegible] و ب = π [illegible] این تساوی حاصل میشود که مخروط [illegible]

$$= \frac{ق + ب + \sqrt{ق\,ب}}{۳} \times [illegible]$$

(۷۷)



(۱۱۴) (شکل ۷۷) اگر شکل [illegible] ربع یک دایره از کره باشد و نصف قطر [illegible] مساوی باشد به خط [illegible] را در روی نصف قطر میگیرند که مساوی [illegible] و چنان فرض میکنند که هر یک قطعه بسیار بزرگ باشد که بایستی واسطهٔ خط [illegible] زیاد کوچک شود در نقطهٔ [illegible] خط [illegible] را



پیرامید کوپه piramide coupée

میگویند اندازهٔ مکعب یک اهرامیکه راسش مقطوع شده باشد و سطح مقطوعهٔ آن متوازی باشد با قاعدهٔ [illegible] باین طریق است که بیاید اندازهٔ مکعب اهرام را به تمامه گرفته و از او تفریق نمود اندازهٔ مکعب اهرامیرا که از او قطع شده است و قاعده‌اش مثلث abc است طریقهٔ دیگر در تحصیل اندازهٔ مکعب اهرام مقطوع اگر فرض کنیم [illegible] = [illegible] و [illegible] = abc از برای سطح مثلث [illegible] که در بالای این مثلث واقع شده است این میشود $\sqrt{[illegible]}$ بعد میاید قاعده‌تین [illegible] و [illegible] را با اندازهٔ که از برای مثلث وسطی پیدا شده است جمع نموده و حاصل جمع را ضرب نمود به ارتفاع اهرام مقطوع که خط [illegible] باشد و حاصل ضرب را تقسیم نمود به ۳ در این حالت این تساوی حاصل میشود

اگر بخواهیم اندازهٔ مکعب تمام اهرام را گرفته و از او تفریق نمائیم اندازهٔ مکعب اهرامیرا که از او قطع شده است فرض میکنیم که قاعدهٔ آن اهرام کثیر الاضلاعهای منتظم بی نهایت باشند شکل [illegible] و از همین عمل $\frac{ق + ب + \sqrt{ق\,ب}}{۳}$ نیز حاصل شود و عمل بدین طریق است

$$\frac{ق}{۳}(a+x) - \frac{ب}{۳}x$$

از مثلثهای متشابه [illegible]

$$m:(a+x) = n:x$$
$$mx = an + nx$$
$$mx - nx = an$$
$$x(m-n) = an$$
$$x = \frac{an}{m-n}$$

اگر بجای x عدل $\frac{an}{m-n}$ را بگذاریم این حاصل میشود

$$\frac{m^2\pi}{۳}\left(a + \frac{an}{m-n}\right) - \frac{n^2\pi}{۳}\left(\frac{an}{m-n}\right)$$
$$\frac{am^2\pi}{۳} + \frac{am^2n\pi}{۳(m-n)} - \frac{an^3\pi}{۳(m-n)}$$
$$\frac{am^3\pi - am^2n\pi + am^2n\pi - an^3\pi}{۳(m-n)}$$
$$\frac{a\pi}{۳}\left(\frac{m^3 - n^3}{m-n}\right)$$

اگر $m^3 - n^3$ تقسیم $m-n$ شود این حاصل میشود

$$\frac{a\pi}{۳}(m^2 + mn + n^2)$$
$$\frac{a}{۳}(m^2\pi + mn\pi + n^2\pi)$$

چونکه $m^2\pi = ق$ و $n^2\pi = ب$

و $mn\pi = \sqrt{m^2\pi \times n^2\pi}$

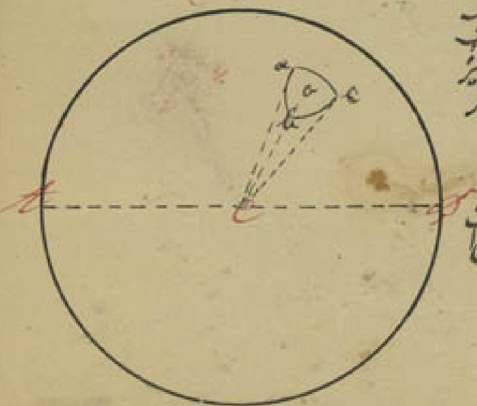
پس $\frac{a}{۳}\left(ق + \sqrt{m^2\pi \times n^2\pi} + ب\right)$

یا $\frac{a}{۳}\left(ق + \sqrt{ق\,ب} + ب\right)$

بدو قسمت مساوی تقسیم میکنند از نقطهٔ mn مماس 2m را
میکشند و خط mn را اخراج میکنند تا عمود وارد بر آن را ملاقات کند در آورند مثلث
2m و Mg و Mc باهم متشابه میشوند و ایند از بعد
متناسبه حاصل میکنند $2m : mn = Mc : Mg$
پس $2m \times Mg = mn \times Mc$
$ac \times mn$ و لاکن اندازهٔ سطح خارج مخروط قائم $2\,Mc \times Mg$
مقطوع را مید که از گردش شکل mn P p 2
بدور خط p P حاصل شود و چون نقطهٔ P نزدیک
تصور شده است میتوان مماس 2m را مثل قوس
c h ملاحظه نمود پس از اینجا معلوم میشود که از گردش
2m به Mg سطح خارج شکل c p P h
که قطعه ایست از کره حاصل میشود و از گردش mn

سطح خارج یک اسطوانهٔ قائمه حاصل میشود که از گردش شکل
P 2 p بدور خط P p حاصل شده باشد پس سطح
خارج قطعهٔ کره مساوی است بسطح خارج اسطوانهٔ قائمه که ارتفاعش
مساوی است بارتفاع قطعهٔ کره معلوم است اگر خط P p آن
قدر بزرگ شود که به c h مساوی شود قوس c h نیز بزرگ
شده قوس c h آن میشود پس سطح خارج نصف کرهٔ
که از گردیدن شکل c h D c بدور نصف قطر c h حاصل
میشود مساوی است بسطح خارج اسطوانهٔ قائمه که از گردیدن ربع
... بدور ... حاصل میشود پس سطح خارج یک
کره مساوی است بسطح خارج اسطوانهٔ قائمه که ارتفاع و قطر دایرهٔ
قاعدهٔ آن مساوی باشد بقطر کره

(۷۸)



(۱۱۵) (شکل ۷۸) کره عبارت از جسم مدوری است

که بعد هر یک از نقاط سطح آن تا مرکز مساوی باشد و این بعد را نصف
قطر نامند و خطی که فرض شود از یک سمت کره و از مرکز آن گذشته
تا سمت دیگر کره برسد آنرا قطر مینامند سطح خارجی کره را این
قسم نیز میتوان معلوم نمود که سطح دایره را که از مرکز کره میگذرد
ضرب نمایند بچهار

(۱۱۶) اندازهٔ مکعب یک کره مساویست بسطح مستدیر خارجی آن
که ضرب شود به ثلث نصف قطر مثلاً اندازهٔ مکعب کرهٔ شکل
هفتاد و هشت مساویست $(۴ \times \pi\, نق^{۲}) \times \frac{نق}{۳} = \frac{۴\pi\, نق^{۳}}{۳}$
اگر بجای نق که نصف قطر است $\frac{ق}{۲}$
بگذاریم که ق بار نصف قطر است اندازهٔ مکعب کره این میشود
$\frac{\pi\, ق^{۳}}{۶}$ بدلیل اینکه چنان تصور میکنیم که در روی سطح کره
یک مثلث بگیریم که سطحش الاغیر النهایه کوچک باشد مثلاً مثلث

ع ل ه اگر هر سه نقطهٔ آ مثلث را بمرکز ع متصل کنیم اهرام ع
ع ل ه حاصل میشود که قاعدهٔ آن بواسطهٔ لاغیر النهایه کوچک بودن
میشود که شکل یک سطح مستوی ملاحظه شود از جمع کردن جمیع اهرام
ها که به بزرگی اهرام مذکورند و کره مرکب است از آنها البته اندازهٔ
مکعب کره حاصل میشود ولاکن جمع همهٔ این مثلث‌های کوچک که جای
قاعده‌های اهرام باشند مثبت یک سطح مستدیر خارجی کره که عبارت از
$\pi\, نق^{۲} \times ۴$ باشد و این جمله را اگر به ثلث ارتفاع یکی از آن
اهرامها که ثلث نصف قطر ع ه یا نق ضرب نمایند اندازهٔ
مکعب کره حاصل میشود و آن از این تساویها معلوم میشود

$$\frac{\pi\, ق^{۳}}{۶} = \frac{۴\pi\, نق^{۳}}{۳} = \frac{نق}{۳} \times \pi\, نق^{۲}\, ۴$$

(۱۱۷) وزن یکبار مکعب از هر ماده را وزن مخصوص او مینامند
و دانستن این بجهت جواب دادن بمسائل مختلفه که در زندگانی

رومیدبود بسیار لازم است

در وزن مخصوص بعضی از مواد

		من
۱۰ ۱/۲	=	وزن آب صاف
۹ ۳/۴	=	باروط توپ
۱۱ ۱/۵	=	باروط تفنگ
۱۰	=	چوب تر
۸	=	چوب خشک
۷۵	=	آهن ریخته شده
۸۰	=	آهن کوبیده شده
۸۸	=	هفت جوش
۱۱۸	=	سرب
۱۱۰	=	نقره

۱۹۸	=	طلا
۱۵ ۱/۲	=	خاک

وزن آب را که واحد فرض کنیم تفاوت سنگینی مواد مذکوره از آب از این قرار خواهد شد

۱	۱۰ ۱/۲	=	آب
۰٫۹	۹ ۳/۴	=	باروط توپ
۱٫۰۶	۱۱ ۱/۵	=	باروط تفنگ
۰٫۹	۱۰	=	چوب تر
۰٫۷	۸	=	چوب خشک
۷٫۱	۷۵	=	آهن ریخته شده
۷٫۶	۸۰	=	آهن کوبیده شده
۸٫۳	۸۸	=	هفت جوش

سرب =	۱۱۸	---------- ۱۱/۲
نقره =	۱۱۰	------- ۱۰/۴
طلا =	۱۹۸	------ ۱۹/۸
خاک =	۱۵½	------ ۱/۴

(۱۱۸) اگر اندازهٔ مکعب یک جسمیکه از مواد مذکوره ساخته شده باشد معلوم باشد وزن آن جسم را بواسطهٔ تناسب در کمال سهولت میتوان پیدا کرد مثال اوّل فرض میکنیم که یک گلوله توپ قطرش ۳ پوس است میخواهند بدانند وزنش چه میشود در این مثال میباید دانست که یک پا مکعب شامل است به

$$12\times12\times12=(12)^3=1728$$

از آنجا این تناسب حاصل میشود: $x : \frac{\pi 3^3}{6} = 75 : 1728$

و $x = 23\frac{1}{2}$ سیر مثال دوّم میخواهند عرّاده را که هشت پا

طول دارد

طول دارد و ۳ پا عرض و ۲ پا عمق از خاکی که از یک خندق کنده‌اند پر نمایند و میخواهند وزن خاکی که در عرّاده ریخته شده است بدانند چه قدر است معلوم است که $8\times3\times2=48$

پس $x : 48 = 15\frac{1}{2} : 1$ و $744 = x$ من خاک

چه وزن این خاک ۷۴۴ من است و یک اسب یکصد و چهل من را میکشد که بعضاً القدر است که آدم میکشد پس پنج اسب از برای کشیدن این عرّاده لازم است مثال سیّم طول یک حوض ۴ پا است و عرضش ۲ پا و عمقش یک پا است اگر این حوض پر از آب باشد وزن آب چه قدر خواهد شد معلوم است که $4\times2\times1 = 8 \times 216 = 1728$

پس $x : 1728 = 10\frac{1}{2} : 1$ و $18144 = x$ من آب

(۱۹) و بالعکس اگر وزن یک جسمیکه از این مواد ساخته شده باشد معلوم باشد بطریق مذکوره در فوق و بواسطهٔ اربعه

سؤال مناسبه اندازهٔ مکعب یکی از ابعاد ثلاثهٔ آنرا میتوان پیدا کرد

یک گلولهٔ توپ ۷۵ من وزن دارد میخواهند بدانند قطرش چه قدر است

جواب $2 : x = 75 : 1728$ پس $x = 46$

و چهل و شش پوس مکعب جسم گلوله است که پیدا شده و قطر گلوله

از فورم $\frac{\pi}{6} d^3$ پیدا میشود باین طریق که $46 = \frac{\pi}{6} d^3$

و $92 = \frac{46 \times 6}{3} = d^3$ پس $d = \sqrt[3]{92} = 4\frac{1}{2}$

مثال در التری یک جنس نقشه هست که بیست گلولهٔ سربی اینها

یک لیور وزن دارد میخواهند قطر یکی از این گلوله‌ها را بدانند در صورتیکه

یک لیور مساوی باشد به هشت سیر وزن یکی از این گلوله‌ها $\frac{8}{20}$ میشود

که مساوی است به $\frac{2}{7}$ سیر $\frac{1}{140} : x = 118 : 1728$

پس $x = 0{,}104$ و $0{,}104 = \frac{\pi}{6} d^3$ و $d^3 = \frac{0{,}104 \times 6}{3} = 0{,}2$

پس $d = 0{,}59$ مثال میخواهند مقدار چند کرهٔ یک توپ

ابتدا ۲۴ پوند

۲۴ پوند بسازند وزن هر یکی ۶ ۵ سیر باشد و میخواهند یک

ظرف از مس بسازند که قطر دایرهٔ قاعدهٔ آن شش پوس باشد

ارتفاع آن ظرف را چه قدر باید گرفت که اگر آنرا پر از باروت

نمایند ۵۶ سیر باروت بگیرد جواب $\frac{56}{40} : x = 9\frac{3}{4} : 1728$

پس $x = 248$ در اینجا میباید مقدار مکعب پوسیکه حاصل

شده است تقسیم نمود بسطح قاعدهٔ آن ظرف که عبارت از πr^2 باشد

$\pi r^2 = \pi 3^2 = 9\pi = 9 \times 3{,}141 = 28{,}269$ و ارتفاع

آن ظرف مساوی میشود به ۹،۱ مثال یک توپی پانزده پا طول دارد

و ۱۲ پوس کلفتی دنبالهٔ اوست و ۸ پوس کلفتی دهنهٔ اوست درازی

سوراخ ۱۳ پا و ۸ پوس است و قطر سوراخ آن چهار پوس است

میخواهند بدانند وزن این توپ که از هفت جوش است چقدر میشود

چیزی که توپ بشکل مخروط تام مقطوع است اندازهٔ مکعب آن

از این محاسبه معلوم میشود × $\sqrt{(6^2 \times 4^2)} + 4^2\pi + 6^2\pi$

۱۴۳۲۲ = ۱۵ × اندازهٔ مکعب سوراخ توپ که

بشکل اسطوانهٔ قائمه است این میشود = (۸ + ۱۴) × $4^2\pi$

۲۲۱۱ = π ۷۰۴ = ۱۷۶ × π ۴ اگر این دو حاصل

ضرب را از هم تفریق نمایند این حاصل میشود ۲۲۱۱ − ۱۴۳۲۲

۱۲۱۱۱ = و این اندازهٔ مکعب لولهٔ توپ است و جهت پیدا نمودن وزن آن

از این اربعهٔ متناسبه معلوم میشود x : ۱۲۱۱۱ = ۸۸ : ۱۷۲۸

پس ۱۷ ۱/۲ = x مثال نارنجکی که وزن او چهل من باشد

و قطر گلوله که از میان او خالی شده است شش پوس باشد

اندازهٔ قطر آن نارنجک به تمامه چند پوس میشود اولاً باید وزن

آن گلوله را که از میان نارنجک خالی شده است و قطرش

شش پوس است مشخص نمود و طریقهٔ عمل آن اینست

۱۱۳

۱۱۳ = ۳٫۱۴۱ × ۳۶ = $\frac{\pi 6^3}{6}$ و از این متناسبه حاصل

میشود x : ۱۱۳ = ۷۵ : ۱۷۲۸ پس ۳۶ ۴ = x

و اگر این نارنجک گلوله بود که میانش پر باشد وزن او + ۴۰ من

۴ ۳۶ + ۴ من میشد که مساویست ۴ ۳۶ + ۲۴ من از این

مناسبت اندازهٔ مکعب نارنجک که ۴ ۳۶ ۲۴ من وزنش است

پیدا میشود ۲۴۹ : x = ۷۵ : ۱۷۲۸ و ۵۷۵ = x

و قطر نارنجک از این عمل حاصل میشود ۵۷۵ = $\frac{\pi x^3}{6}$

پس ۱۰ ۴ = x مثال حوضیکه ۱۲ طول و ۸ عرض

و ۲ عمق آن باشد و از نهریکه طول آن ۱۸ و عرض آن ۴

و شدت آب ۳ گره باشد باین مغز که آب در هر ثانیه ۳ پا

راه طی کند به آن حوض آب بیاید در چند وقت آن حوض

پر خواهد شد اندازهٔ مکعب حوض اینست ۲۰۷۳۶ = ۲۱۶ × ۹۶ = ۹۶ = ۲ × ۴ × ۱۲

وسطح مربع مستطیل راه آب این میشود $۴ \times ۸ = ۳۲$

واندازهٔ مکعب آبی که در یک ثانیه داخل حوض میشود اینست

$۳ \times ۳۲ = ۳۶ \times ۳۲ = ۱۱۵۲$ پس وزن آبیکه

در یک ثانیه داخل حوض میشود اینست $x : ۱۱۵۲ = ۱۰\frac{۱}{۲} : ۱۷۲۸$

پس $x =$ ۷ من در اینجا باید فهمید وزن آبیکه در حوض

جا میگیرد و وزن آب از این مناسبت معلوم میشود

$x : ۲۰۷۳۶ = ۱۰\frac{۱}{۲} : ۱$ و $x = ۲۱۷۷۲۸$ من آب

پس اگر این وزن آب که در حوض جا میگیرد تقسیم بکنیم به هفت من

آبیکه در یک ثانیه داخل حوض میشود حاصل ثانیه خواهد شد

$۲۱۷۷۲۸ : ۷ = ۳۱۱۰۴$ ثانیه یا $۳۱۱۰۴ : ۶۰ = ۵۱۸$ دقیقه

و $۵۱۸ : ۶۰ = ۸$ ساعت ۳۸ دقیقه

(۱۲۰) وزن مطلق یک جسم از هر ماده که باشد فرض میکنیم

کس دلیر

که به ح وزن مخصوص آن مساوی است ک و اندازهٔ (مساویست)

مکعب آن مساویست ج از این قرار وزن یک جسم مطلق

مساویست بوزن مخصوص که ضرب بشود به اندازهٔ مکعب آن

یا ج × ک = ح مثال قدری بارود طفنگ داریم

که اندازهٔ او صد و دوازده پوس مکعب است میخواهیم بدانیم

که وزن آن چه قدر است و آن از این تناسب معلوم میشود

$ح = ۱۱\frac{۱}{۵} \times ۱۱۲ = ۱۱\frac{۱}{۵} \times \frac{۱۱۲}{۱۷۲۸} = \frac{۵۶}{۵} \times \frac{۱۴}{۲۱۶} = \frac{۵۶}{۵} \times \frac{۷}{۱۰۸} = \frac{۹۸}{۱۳۵} = ۲۹$

(۱۲۱) و بالعکس اگر وزن مطلق و اندازهٔ مکعب یک جسم معلوم

باشد وزن مخصوص آن جسم از این تناسب معلوم میشود $\frac{ح}{ج} = ک$

مثال یک شمش آهن که وزن آن چهل من و اندازهٔ مکعب آن

۸۶۴ باشد میخواهیم بدانیم وزن مخصوص آن آهن چه قدر است

وزن آن از این تناسب معلوم میشود $\frac{۴۰}{۸۶۴} = \frac{۴۰}{\frac{۱}{۲}} = ۸۰ = ک$

(۱۲۲) اگر وزن مطلق و وزن مخصوص یک جسم معلوم باشد
اندازهٔ ملعب آنرا باین قسم پیدا می‌نمائیم و این در حالتی است
که آن جسم بی قاعده باشد در این حالت این تساوی حاصل میشود

$$\frac{\text{وم}}{\text{وخ}} = \text{م}$$

مثال قدری خاک که وزن آن ۱۲۰ گ و وزن
مخصوص آن از روی لوح ۱۵½ باشد میخواهیم بدانیم اندازهٔ
ملعب آن چه قدر است و از این تساوی اندازهٔ ملعب معلوم میشود

$$\text{م} = \frac{۱۲۰}{۱۵\frac{۱}{۲}} = \frac{۲۴۰}{۳۱} = ۸$$

(۱۲۳) در حالتیکه وزن مطلق و وزن مخصوص یک جسم
معلوم نباشد و آن جسم از ماده‌ای باشد که آب شواند باو
ضرر برساند و بخواهند اندازهٔ ملعب او را پیدا نمایند از این قرار
عمل می‌نمایند که آن جسم را در میان ظرفی که پر از آب باشد
میگذاریم و هر قدر آب که از آن ظرف بریزد اندازهٔ ملعب آن

مساویست

مساویست به اندازهٔ ملعب آن جسم مثال یک زورق که صد من
وزن داشته باشد و پنجاه پا ملعب اندازهٔ وسعت وسط او باشد
میخواهیم بدانیم که چند من میتوان او را بار کرد که چهار پوس
از آن زورق از آب بیرون بماند فرض میکنیم که طول زورق
۸ و عرض ۳ باشد و پنجاه پا ملعب که وسعت وسط زورق است
اگر از چوب باشد وزن آن چوب از این قرار میشود ۵۰۰ = ۱۰ × ۵۰
و اندازهٔ ملعب چوب زورق که وزن صد من بود از این قرار میشود ۱۰ = ۱۰ : ۱۰۰
پس اندازهٔ ملعب تمام زورق از این قرار میشود ۶۰ = ۱۰ + ۵۰
از برای پیدا کردن اندازهٔ ملعب آن قسمت زورق که از آب
باید خارج باشد از این قرار میشود ۸ = ½ × ۳ × ۸ = ۴ × ۳ × ۸
و اندازهٔ ملعب آبی که زورق بجای او قرار گرفته است از این قرار میشود
۵۲ = ۸ − ۶۰ از برای پیدا کردن وزن ۵۲ پا ملعب آب

از این قرار عمل نمائیم ١٠ ١/٢ : x = ١ : ٥٤٦و٥٢ = x

اگر از ٥٤٦ من که وزن آب است وزن خود زورق را که صد من

باشد تفریق کنیم حاصل مساوی میشود بوزن بار زورق که

٥٤٦ − ١٠٠ = ٤٤٦ من مثال دیگر اگر یک تیری که طول آن دو ذرع و از

وقطر دایرهٔ پایین او ٨ پس وقطر دایرهٔ بالای او شش پوس باشد در میان

آب میندازند میخواهیم بدانیم که چه قدر از آن از آب بیرون میماند

اندازهٔ مکعب آن تیر به تمام این میشود $\frac{٤^2\pi + ٣^2\pi + \sqrt{٤^2 \times ٣^2}\,\pi}{٣} \times$

$\times ٤٨ \times ٧٢ = \frac{٢٥\pi + ١٢\pi}{٣} \times ١٤٤ = \frac{٣٧\pi}{٣} \times ١٤٤ = ٣٧\pi \times ٤٨ = ٥٣٢٨$

و وزن این تیر از این قرار است که ١٠ : x = ٥٣٢٨ : ١٧٢٨

و ٨ ٣٠ من = x اندازهٔ مکعب آبی که وزنش ٨ ٣٠ من باشد

این قدر میشود ٨ ٣٠ من : x = ١٠ من : ١٧٢٨ و ٥٠٦٨ = x

از برای فهمیدن اندازهٔ آن قسمت چوب که از آب خارج است عمل

این قسم میشود $\frac{٢١١}{٢٢٢} = \frac{٤٢٢}{٤٤٤} = \frac{١٢٦٧}{١٣٣٢} = \frac{٥٠٦٨}{٥٣٢٨}$

پس معلوم شد که یازده قسمت از بیست و دو قسمت از آن تیر در میان

آب است و یازده قسمت از بیست و دو قسمت از آن از آب خارج است

(١٢٤) فرض میکنیم که قطر یک کلوله ک و اندازهٔ مکعب او ج باشد و از یک

کلولهٔ دیگر که قطر آن مساوی م باشد و اندازهٔ مکعبش مساوی ع باشد

از این قرار که فوق نوشته شد حاصل میشود $\frac{\pi\,ک^3}{٦} = ج$ و $\frac{\pi\,م^3}{٦} = ع$

و از این فوق نوشته و این مناسبت حاصل میشود ج : ع =

$ک^3 : م^3 = \frac{\pi\,ک^3}{٦} : \frac{\pi\,م^3}{٦}$ پس از این مناسبت

مشخص میشود که اندازهٔ مکعب دو کلوله که از یک ماده باشند نسبت

دارند مثل مکعب قطر یکدیگر

(١٢٥) فرض میکنیم که وزن یک کلوله مساوی باشد به و و اندازهٔ

مکعبش مساوی باشد به ج و همچنین یک کلولهٔ دیگر که وزن او

م و اندازهٔ مکعب ق' باشد در این حالت تساوی $\frac{ق}{ح} = ک$

و $\frac{ق'}{ح'} = ک$ حاصل میشود پس $\frac{ق'}{ح'} = \frac{ق}{ح}$ و از این

تساوی این تناسب حاصل میشود $ح : ح' = ق : ق'$ و از این

مناسبت معلوم میشود که نسبت وزن دو جسمیکه از یک ماده باشند مثل

نسبت اندازهٔ مکعب آنهاست چنانچه در سابق ذکر کردیم که نسبت

اندازهٔ مکعب دو جسمیکه از یک ماده باشند مثل نسبت مکعب قطر

آنهاست و از اینجا هم که از برای ما معلوم شد که نسبت وزن

دو جسمیکه از یک ماده باشند مثل نسبت اندازهٔ مکعب آنهاست

پس از اینجا معلوم میشود که نسبت وزن دو جسمیکه از یک ماده باشند

مثل نسبت مکعب قطر آنهاست باین طریق که

$د'^3 : د^3 = ق : ق'$ و $ح : ح' = ق : ق'$

پس $د'^3 : د^3 = ح : ح'$

(۱۲۶) اگر وزن و قطر یک گلوله که از یک ماده باشد معلوم باشد

و گلولهٔ دیگر که وزنش معلوم باشد و قطرش نامعلوم قطر گلولهٔ نامعلوم را

از این تناسب پیدا نمائیم مثال در استرنه گلولهٔ آهنیکه وزنش

یک لیبره باشد قطرش مساوی میشود ۱٫۸۹ از برای پیدا کردن

قطر یک گلولهٔ دیگر که وزنش دوازده لیبره باشد این تناسب حاصل

میشود $x^3 : ۱٫۸۹^3 = ۱۲ : ۱$ اگر اصل سیم از هر دو جمله این

تناسب بگیریم این تناسب حاصل میشود $x : ۱٫۸۹ = \sqrt[3]{۱۲} : ۱$

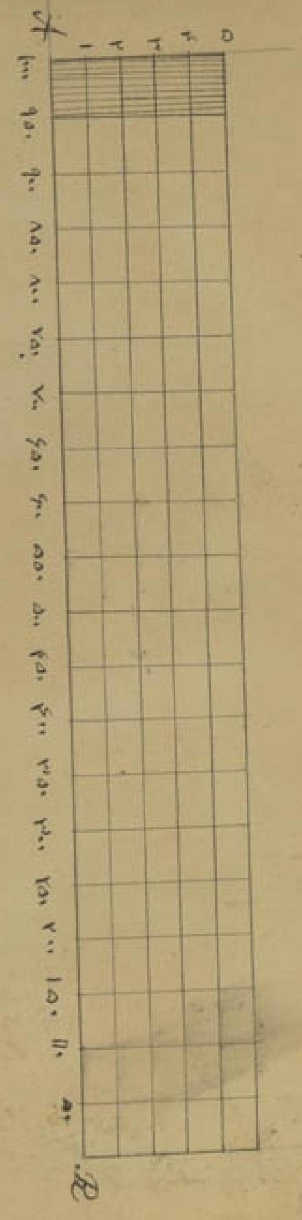
و $x = ۱٫۸۹\sqrt[3]{۱۲} = ۱٫۸۹ \times ۲٫۲ = ۴٫۱۵۸$

مثال دیگر در همان حالت قطر یک گلولهٔ دوازده پوند مساوی است

چهار پوس میخواهیم قطر یک گلولهٔ توپ بیست و چهار پوند را پیدا

کنیم باین طریق عمل نمائیم $x^3 : ۴^3 = ۲۴ : ۱۲$ و

$x^3 : ۴^3 = ۲ : ۱$ و $x : ۴ = \sqrt[3]{۲} : ۱$ پس



$x = ۴\sqrt[۳]{۴} = ۴ \times ۱٫۳ = ۵٫۲$

(۱۲۷) درصورتیکه وزن و قطر یک گلوله معلوم باشد و ما بخواهیم قطر آنرا دو برابر یا سه برابر یا چهار برابر یا زیادتر بکنیم وزن گلوله‌های حاصل شده چه قدر میشود از این تناسب پیدا میکنیم فرض میکنیم که وزن یک گلوله m و قطرش ۱ باشد و گلوله دیگر وزنش n و قطرش ۲ باشد و گلوله دیگر وزنش o و قطرش ۳ باشد این تناسب حاصل میشود

$m : n : o = ۱^۳ : ۲^۳ : ۳^۳ =$

$= ۱ : ۸ : ۲۷$

(۱۲۸) در تقسیم خطوط مستقیم بچند قسمت مساوی مثال اول (شکل ۱۰) خط مستقیم ... را میخواهیم بهزار قسمت مساوی تقسیم نمائیم باین قسم عمل میکنیم که از برای هزار ۳ جزء پیدا میکنیم که اگر آنها را باهم ضرب نمائیم مساوی بهزار بشود مثلاً $۵ \times ۱۰ \times ۲۰ = ۱۰۰۰$

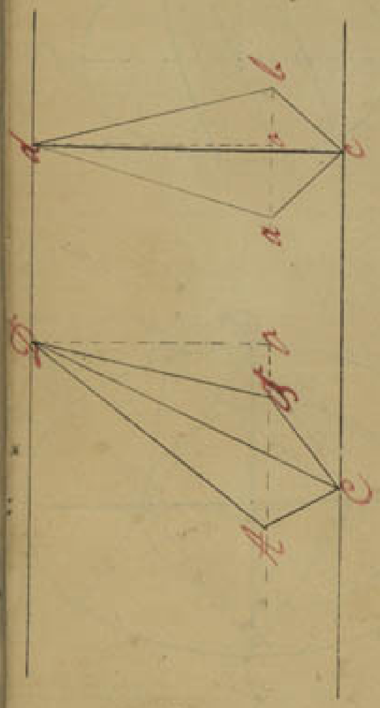
مثال دویم

شکل ۱۰



(شکل ۱۱) مثال دویم خط مستقیم ... را میخواهیم به شصت و چهار قسمت مساوی تقسیم بکنیم باین طریق عمل نمائیم که از برای ۶۴ سه جزء مطلق پیدا میکنیم که حاصل ضرب آنها مساوی به ۶۴ بشود مثلاً $۲ \times ۴ \times ۸ = ۶۴$

مساوی

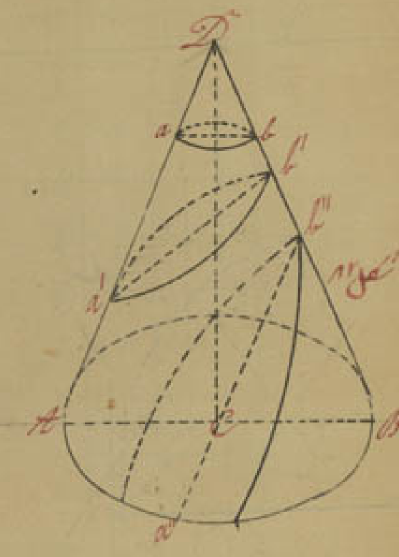


(۱۲۹) دو جسم که باهم قاعده و ارتفاع برابر داشته باشند مثلاً دو شکل مخروطی یا دو گونیا یا دو سیلندر و یا منشوری که در میان دو سطح متوازی واقع شده باشند اندازهٔ مکعب آنها باهم مساوی خواهد شد اگر قاعده آنها باهم مساوی باشند اگر بخواهیم اندازهٔ مکعب از شکل مخروطی ... را بدانیم از این تساوی حاصل میشود

$ABC \times \frac{D}{۳} = abc \times \frac{da}{۳}$

فصل دویم
در خطوط منحنی

(۱۳۰) اگر یک مخروط را به ۳ قسم مختلف ببرند خطوطی که در ...

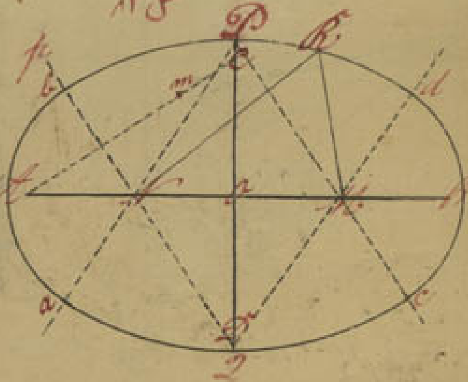


شکل ۸۲

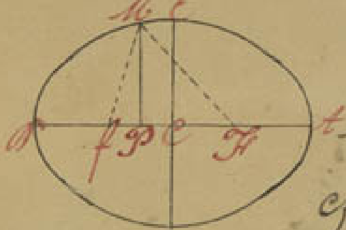
اول متوازی شد با قاعدهٔ شکل و از بیرون دفعه مینویسیم با هیچ طرف
شکل متوازی نباشد و در دفعه سیم متوازی بشود یک پهلوی شکل
در این حالت ۳ خط منحنی حاصل میشود با این طریق که از بیرون دفعه
اول سطح دایره حاصل میشود و از بیرون دفعه ثانی سطح خط بیضی
و از دفعه ثالث سطح خط پارابل کشیدن دایره در تعریف دایره را
شکل ۸۳
در باب اول بیان کرده ایم از برای کشیدن خط بیضی با این قسم عمل مینمائیم
که خط [illegible] محور بزرگ و خط DC محور کوچک شکل است
نقطهٔ [illegible] را به نقطهٔ C وصل نمائیم تفاوت مابین نصف محور
بزرگ و نصف محور کوچک را که $CO - O$[illegible] باشد
در روی خط C[illegible] از نقطهٔ C تا نقطهٔ [illegible] میگذاریم [illegible] را
بمحور D[illegible] بدو قسمت مساوی قسمت میکنیم و نقطهٔ [illegible] را
مساوی میکنیم با خط N[illegible] و نقطهٔ P را با خط Q

کار از این عمل

شکل ۸۳



کار از این عمل از برای چهار مرکز حاصل میشود که نقطه های N
و M و P و Q باشد از مرکز N قوس
ab و از مرکز M قوس cd و از مرکز P قوس
ac و از مرکز Q قوس bd حاصل میشود که از این عمل شکل
بیضی حاصل میشود و خاصیت خط بیضی این است که اگر از یک نقطه
مطلق او که مثلاً نقطهٔ R باشد تا مرکز N و M
خط بکشیم حاصل جمع آن دو خط مساوی میشود به قطر بزرگ خط
بیضی با این طریق که $AB = NR + RM$
چیزی در باب اول جهت کشیدن دایره تساوی داریم لهذا جهت پیدا کردن
تساوی خط بیضی از این قرار عمل نمائیم تا تساوی و جهت کشیدن خط بیضی
حاصل شود در شکل ۸۳ فرض میکنیم $CP = x$ و $MP = y$
و $a = AC$ و $2a = Mf + MF$ و $cF = cf$



و $z = FM$، و $v = Mf$ در مثلث قائم‌الزاویهٔ کوچک این تساوی حاصل میشود $\overline{Mf}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{Pf}^2$ اگر بجای مربعهای بزرگ مساوی آنها را بگذاریم این میشود $v^2 = y^2 + (c-x)^2$ و در مثلث قائم‌الزاویهٔ بزرگ این تساوی درست $\overline{MF}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PF}^2$

باز بجای مربعهای بزرگ تساوی آنها را بگذاریم این قسم میشود $z^2 = y^2 + (c+x)^2$ تساوی کوچک را از تساوی بزرگ تفریق میکنیم این حاصل میشود $z^2 - v^2 = y^2 + c^2 + 2cx + x^2 - y^2 - c^2 + 2cx - x^2$

و حاصل تفریق این میشود $z^2 - v^2 = 4cx$ چیزی نیست مشخص میکنیم $2a = z + v$ و در تساوی سابق هم که $z^2 - v^2$ هست بطریق دیگر میکنیم $z^2 - v^2 = (z+v)(z-v) = 4cx$ پس اگر این تساوی را بر تساوی $2a = z + v$ تقسیم نمائیم این تساوی حاصل میشود $z - v = \frac{4cx}{2a}$

چیزی که جمع دو نامعلوم و تفریق دو نامعلوم ازبرای

حاصل شد

حاصل شد پس از این قرار $z = a + \frac{cx}{a}$ و $v = a - \frac{cx}{a}$

از تساوی دویم $z^2 = y^2 + (c+x)^2$ بواسطهٔ این عمل حاصل نمائیم $y^2 = z^2 - (c+x)^2$ اگر بجای z^2 مجذور $a + \frac{cx}{a}$ را بگذاریم

باین طریق میشود $y^2 = a^2 + 2cx + \left(\frac{cx}{a}\right)^2 - c^2 - 2cx - x^2$

پس از اختصار دادن بر تساوی و این قسم میشود $y^2 = a^2 - c^2 + \left(\frac{cx}{a}\right)^2 - x^2$

اگر x^2 را به a^2 ضرب کنیم و باز به a^2 تقسیم نمائیم تغیر در تساوی نمیدهد باین طریق $y^2 = a^2 - c^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} - \frac{a^2x^2}{a^2}$ چیزی که دو جملهٔ آخر تساوی $\frac{x^2}{a^2}$ هست پس اگر آن دو جمله را به $\frac{x^2}{a^2}$ تقسیم نمائیم این تساوی حاصل میشود $y^2 = a^2 - c^2 - \frac{x^2}{a^2}(a^2 - c^2)$ چیزی که در دو جمله $a^2 - c^2$ داریم لیکن جملهٔ آخری مخرج a^2 دارد پس جملهٔ اولی را هم ضرب به a^2 و تقسیم به a^2 نمائیم که مخرج هر دو جمله یکی میشود

تساوی حاصل میشود $y^2 = a^2\left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right) - x^2\left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right)$.

پس $y^2=\frac{a^2-c^2}{a^2}(a^2-x^2)$ و $y=\frac{\sqrt{a^2-c^2}\times\sqrt{a^2-x^2}}{a}$

خط پارابل آنخط است که در (شکل ۸۳) دیده میشود برای هر نقطه

O مرکز پارابل ثابت و خط CO مساوی باشد بخط CD

و خط ST در نقطه D عمود باشد بر محور پارابل

که خط $M\text{-}D$ باشد در این حالت خاصیت پارابل این

میشود که هر نقطه در روی خط پارابل ملاحظه شود و از همان نقطه

عمودی بکشند بخط ST و خطی هم از آن نقطه بکشند تا بمرکز

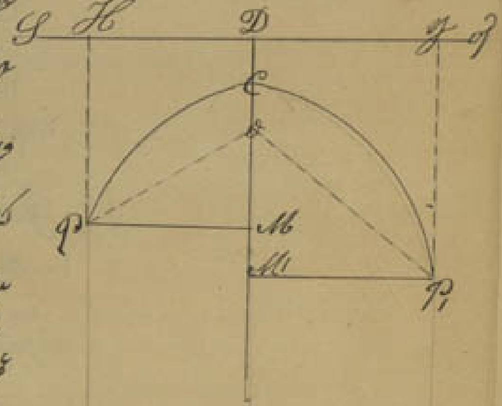
که نقطه O باشد آن دو خط باهم مساوی میشوند از این قرار

$PH=PO$ و $CD=CO$ و

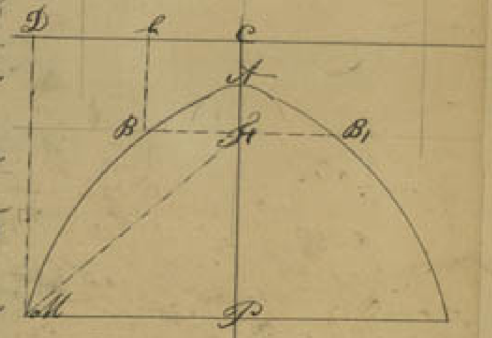
$P'y=P'O$ و محور پارابل MC را خط

آبسیس میگویند و خطوط PM و $P'M'$ را

خط اوردیناد مینامند و تساوی که از برای خط پارابل قرار



شکل ۸۳



داده اند

داده اند اینست $y^2=2px=\overline{PM}^2$ در این تساوی خط آبسیس

MC را x و خط اوردیناد PM را y و خط CD را

که ربع پارامتر است paramedre $\frac{1}{2}p$ فرض میکنیم

و این درحالتی است که نصف پارامتر c باشد و در خط پارابل از این

شکل (۸۳) و از این تساوی هم حاصل میشود $MF=MD$

و فرض میکنیم که PF مساوی x و PM مساوی y و MF

مساوی c و مساوی c باشد و از مثلث قائم الزاویه این حاصل میشود

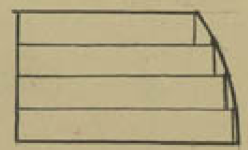
$\overline{PF}=\sqrt{\overline{FM}^2+\overline{MP}^2}$ یا $\sqrt{(x-c)^2+y^2}=x+c$

اگر هر دو طرف تساوی را مجذور بکنیم باین طور میشود $x^2+2cx+c^2=x^2-2cx+c^2+y^2$

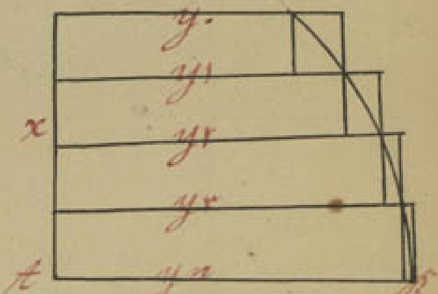
پس از اختصار دادن هر دو طرف تساوی این حاصل میشود $y^2=4xc$

و $y=\sqrt{4xc}$ و خط BB' را که از مرکز F کشیده شده است

پارامتر میگویند اگر $2c$ مساوی بکنیم بنصف پارامتر که FB باشد



شکل ۸۵



وفرض میکنیم مساوی باشد nh در این حالت ایضاً این میشود $y = \sqrt{2rnx}$ (?)

در پیدا کردن پا (؟) که از برای نسبت مابین قطر و محیط دایره مصطلح است

(شکل ۸۵) فرض میکنیم که این شکل را به n مربع مستطیل تقسیم

نمائید در حالتیکه n عددی باشد الاغیر النهایه بزرگ اگر ارتفاع جمیع آن

مربع های مستطیل x نامیده شود ارتفاع هر یک از آنها $\frac{x}{n}$ میشود و فرض میکنیم

که $h = \frac{x}{n}$ اگر f' جمع مربع های مستطیل باشد که در میان این قوس

واقعند و f'' جمع مربع های مستطیل باشد که یکجزوشان از قوس خارج است

و f (؟) اندازه مربع تمام این شکل باشد معلوم است $f' < f$ و

$f < f''$ و $f' = h(y_0 + y_1 + y_2 + \dots y_{n-1})$

و $f'' = h(y_1 + y_2 + y_3 \dots y_n)$ در باب (؟)

در (؟) دیدیم معلوم شد که در هر خط منحنی خط اوردیناد و ابسیس وجود دارد

~~وازبرای هریک از الخطوط منحنی ابسیس و اوردیناد آنها نسبت در بند (؟)~~

و ابسیس

~~و ابسیس وجود دارد~~ وازبرای هریک از الخطوط منحنی ابسیس و اوردیناد

آنها یکی است و مخصوص است حال رابطه ای مینویسیم که عموماً

شامل جمیع خطوط منحنی باشد و آن این است $y = ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} \dots$

در این رابطه در کوفیسیان های a و b و c و اکسپوزان های α

و β و γ را میتوان اعداد فرض نمود که در رابطه یهای مخصوص وجود

دارند آنوقت این رابطه میتواند بهمه خطوط منحنی شامل شود

در این شکل میتوان ملاحظه نمود که y_0 و y_1 و y_2 و y_3

و y_n اوردینادها باشند اگر بجای x که ابسیس میباشد بتوان

اینها گذاشته شود h و $2h$ و $3h$ و همچنین تا

nh از برای y این رابطه ها حاصل خواهند شد

$y_1 = a \times 1^{\alpha} \times h^{\alpha} + b \times 1^{\beta} \times h^{\beta} + c \times 1^{\gamma} \times h^{\gamma} + \dots\dots$

$y_2 = a \times 2^{\alpha} \times h^{\alpha} + b \times 2^{\beta} \times h^{\beta} + c \times 2^{\gamma} \times h^{\gamma} \dots\dots$

$$y_3 = A \times 3^a \times h^a + B \times 3^b \times h^b + C \times 3^c \times h^c + \cdots$$

$$y_n = A \times n^a \times h^a + B \times n^b \times h^b + C \times n^c \times h^c + \cdots$$

اگر همه اوردیناد اینست و بیهارا جمع نمائیم از برای f'' این حاصل میشود

$$f'' = A h^{a+1}\left(1^a + 2^a + 3^a + \cdots n^a\right) + B h^{b+1}\left(1^b + 2^b + 3^b + \cdots n^b\right) + C h^{c+1}\left(1^c + 2^c + 3^c + \cdots n^c\right) + \cdots$$

یعنی f'' اندازه مربع است پس در جمع کردن اوردینادها باید در h ضرب شود و h^{a+1} نتیجه که ارتفاع است

مقادیر واقعه در میان پاران تزها به نهایت که یک رشته تصاعدی هندسی است و از برای پیدا کردن حاصل جمع عدت مراتب آن که مرکب است از n جمله این فورمول را می‌نویسیم که فرمول عامه است

$$\left(\frac{n^{a+1}}{a+1} + \frac{n^a}{2} + \frac{a}{12} n^{a-1} + \cdots\right)$$

حال را اگر بجای آن مقادیر مشابه که میان پاران تزها واقع می‌باشند فورمول عامه آنها را بنویسیم این حاصل میشود

این قاعده جهت جمع کردن اعداد است که یک یک بالا برود و اگر یوزان آن مساوی باشند مثلا

$1^2\ 2^2\ 3^2\ 4^2\ 5^2\ 6^2 \cdots$

$\frac{a}{12} n^{a-1} + \cdots)$

$$f'' = A h^{a+1}\left(\frac{n^{a+1}}{a+1} + \frac{n^a}{2} + \frac{a}{12} n^{a-1} + \cdots\right) + B h^{b+1}\left(\frac{n^{b+1}}{b+1} + \frac{n^b}{2} + \frac{b}{12} n^{b-1} + \cdots\right) + C h^{c+1}\left(\frac{n^{c+1}}{c+1} + \frac{n^c}{2} + \frac{c}{12} n^{c-1} + \cdots\right) + \cdots$$

اگر در این تساوی بجای nh مساوی آنرا که x می‌باشد بگذاریم این حاصل میشود

$$f'' = \left(A\frac{x^{a+1}}{a+1} + B\frac{x^{b+1}}{b+1} + C\frac{x^{c+1}}{c+1} + \cdots\right) + \frac{1}{n}\left(\frac{A}{2}x^{a+1} + \frac{B}{2}x^{b+1} + \frac{C}{2}x^{c+1} + \cdots\right) + \frac{1}{n}\left(\frac{Aa}{12}x^{a+1} + \frac{Bb}{12}x^{b+1} + \frac{Cc}{12}x^{c+1} + \cdots\right)$$

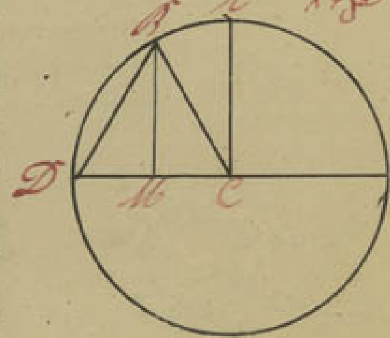
چون عدد n لا غیر النهایه بزرگ فرض شده است کمیات $\frac{1}{n}$ و $\frac{1}{n^2}$ را باین طریق می‌توان نوشت $\frac{1}{\infty}$ و $\frac{1}{\infty^2}$ و چون این مقادیر مساوی اند بصفر پس از برای f'' که لا غیر النهایه به حد نزدیک میشود این حاصل خواهد شد

$$F = \left(A\frac{x^{a+1}}{a+1} + B\frac{x^{b+1}}{b+1} + C\frac{x^{c+1}}{c+1} + \cdots\right)$$

پس بواسطه این تساوی از برای پیدا کردن سطح مربع یک شکل که

واقع است ما بین خط متوازی میاید یکتساوی از برای ما معلوم شد x و y پیدا نمود و در هر جملهٔ آن تساوی با کسی بوزان x یک واحد علاوه نمود و بهمان کسی بوزان تقسیم بکنیم (شکل ۸۶) فرض میکنیم $a = CD$ و $x = CM$ و $y = MB$ در دایره

شکل ۸۶



از برای x و y اینتساوی موجود است

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{1 \times x^4}{2 \times 4 a^3} - \frac{1 \times 3 \times x^6}{2 \times 4 \times 6 a^5}$$

پس اندازهٔ مربع از شکل CABM از قرار مذکور است

$$CMBA = ax - \frac{x^3}{2 \times 3 a} - \frac{1 \times x^5}{2 \times 4 \times 5 a^3} - \frac{1 \times 3 \times x^7}{2 \times 4 \times 6 \times 7 a^5}$$

و از برای اندازهٔ مربع مثلث قائم الزاویه CMB این حاصل میشود

$$BCM = \frac{1}{2} CM \times MB = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} =$$

$$= \frac{x}{2}\left(a - \frac{x^2}{2a} - \frac{1 \times x^4}{2 \times 4 a^3} - \frac{1 \times 3 \times x^6}{2 \times 3 \times 6 a^5} - \dots\right) =$$

$$= \frac{ax}{2} - \frac{x^3}{2 \times 2 a} - \frac{1 \times x^5}{2 \times 4 \times 2 a^3} - \frac{1 \times 3 \times x^7}{2 \times 4 \times 6 \times 2 a^5} - \dots$$

از شکل

از شکل معلوم است که اینتساوی از برای ما حاصل خواهد شد

$$BCA = CMBA - BCM =$$

$$= ax\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{x^3}{2a}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1 \times x^5}{2 \times 4 a^3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) +$$

$$+ \frac{1 \times 3 \times x^7}{2 \times 4 \times 6 a^5}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7}\right) + \dots =$$

$$= \frac{ax}{2} + \frac{1 \times x^3}{2 \times 2 \times 3 a} + \frac{1 \times 3 x^5}{2 \times 2 \times 4 \times 5 a^3} + \frac{1 \times 3 \times 5 x^7}{2 \times 2 \times 4 \times 6 \times 7 a^5} + \dots$$

اگر فرض کنیم که قوس $z = AB$ اینتساوی حاصل میشود

پس $BCA = \frac{AB \times CA}{2} = \frac{az}{2}$ پس

$$\frac{az}{2} = \frac{ax}{2} + \frac{1 \times x^3}{2 \times 2 \times 3 a} + \frac{1 \times 3 x^5}{2 \times 2 \times 4 \times 5 a^3} + \frac{1 \times 3 \times 5 x^7}{2 \times 2 \times 4 \times 6 \times 7 a^5} + \dots$$

پس $z = x + \frac{1 \times x^3}{2 \times 3 a^2} + \frac{1 \times 3 x^5}{2 \times 4 \times 5 a^4} +$

$$+ \frac{1 \times 3 \times 5 x^7}{2 \times 4 \times 6 \times 7 a^6} + \frac{1 \times 3 \times 5 \times 7 x^9}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 9 a^8} + \dots$$

در اینتساوی اخیره فرض میکنیم $x = \frac{a}{2} = \frac{1}{2} CD$ آنوقت

از برای z این حاصل میشود $z = \frac{a}{2} + \frac{1}{2 \times 3 a^2} \times \frac{a^3}{2^3} + \frac{1 \times 3}{2 \times 4 \times 5 a^4} \times \frac{a^5}{2^5} + \dots$

$$= a\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\times3\times2^{3}} + \frac{1\times3}{2\times4\times5\times2^{5}} + \frac{1\times3\times5}{2\times4\times6\times7\times2^{7}} + \cdots\cdots\right)$$

با این فرضیکه کرده‌ایم $\frac{a}{2} = x$ از برای ما این حاصل میشود قوس $30^{\circ} = S = \ldots$

بعلت اینکه قوس $30^{\circ} = 90^{\circ} - 60^{\circ} =$ قوس $\ldots -$ قوس $\ldots = \ldots$

پس قوس $30^{\circ} = a\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\times3\times2^{3}} + \frac{1\times3}{2\times4\times5\times2^{5}} + \cdots\cdots\right)$ و

$$12 \times \text{قوس } 30^{\circ} = \text{قوس } 360^{\circ} = 12a\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\times3\times2^{3}} + \frac{1\times1\times3\times3}{1\times2\times3\times4\times5\times2^{5}} \cdots\cdots\right)$$

فرض میکنیم که در این ست جملهٔ اول که $\frac{1}{1\times2}$ است مساوی A باشد

و جملهٔ دوم مساوی B و جملهٔ سیم مساوی C و همچنین

اگر در این ست در عوض آن جمله‌ها مساوی آنها را بگذاریم این حاصل

خواهد شد

$$\text{قوس } 360^{\circ} = 12a\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}A \times \frac{1\times1}{2\times3} + \frac{1}{4}B \times \frac{3\times3}{4\times5} + \frac{1}{4}C \times \frac{5\times5}{6\times7} + \frac{1}{4}D \times \frac{7\times7}{8\times9} + \cdots\cdots\right)$$

مقدار هر یک از آن جمله‌ها از این لوح معلوم میشود

$A = \cdots\cdots\cdots\cdots = 0{,}5 = \frac{1}{2}$

اگر این ست را ... این حاصل خواهد شد

$$\text{قوس } 360^{\circ} = 12a\left(\frac{1}{1\times2} + \frac{1\times1}{1\times2\times3\times2^{3}} + \frac{1\times1\times3\times3}{1\times2\times3\times4\times5\times2^{5}} + \cdots\right)$$

$B = 0{,}02083333333 = \frac{1}{4}A \times \frac{1\times1}{2\times3}$

$C = 0{,}00234375000 = \frac{1}{4}B \times \frac{3\times3}{4\times5}$

$D = 0{,}00034877232 = \frac{1}{4}C \times \frac{5\times5}{6\times7}$

$E = 0{,}00005933974 = \frac{1}{4}D \times \frac{7\times7}{8\times9}$

$F = 0{,}00001092391 = \frac{1}{4}E \times \frac{9\times9}{10\times11}$

$G = 0{,}00000211826 = \frac{1}{4}F \times \frac{11\times11}{12\times13}$

$H = 0{,}00000042617 = \frac{1}{4}G \times \frac{13\times13}{14\times15}$

$I = 0{,}00000008814 = \frac{1}{4}H \times \frac{15\times15}{16\times17}$

$K = 0{,}00000001862 = \frac{1}{4}I \times \frac{17\times17}{18\times19}$

$L = 0{,}00000000401 = \frac{1}{4}K \times \frac{19\times19}{20\times21}$

$M = 0{,}00000000087 = \frac{1}{4}L \times \frac{21\times21}{22\times23}$

$N = 0{,}00000000016 = \frac{1}{4}M \times \frac{23\times23}{24\times25}$

ﮪ = ۴ . . . . = ٫ ۲۵×۲۵ / ۲۶×۲۷ × ث ۱/۴

پ = ... = ٫ ۲۷×۲۷ / ۲۸×۲۹ × ﮪ ۱/۴

پس از جمع کردن این عددها این حاصل میشود

٫۵۲۳۵۹۸۷۷۵۵۷

یا ٫۵۲۳۵۹۸۷۷۵۶ و

٫۵۲۳۵۹۸۷۷۵۶ × ب × ۱۲ = ۳۶۰ (قوس) اگر

قطر دایره یکواحد باشد در آن حالت ب مساوی میشود با ۱/۲ پس

این مساوی حاصل میشود ٫۵۲۳۵۹۸۷۷۵۶ × ۱/۲ × ۱۲ = π = ۳۶۰ (قوس)

پس ۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵۳۶ = π از برای اینکه میشود

با این فورمول ح = ا س^(ا+۱) / (ا+۱) + ب س^(ب+۱) / (ب+۱) + ج س^(ج+۱) / (ج+۱)

اندازهٔ مکعب اجسامی را نیز که واقع شده باشد بین دو سطح متوازی پیدا

نمائیم باید چنانچه سطح را منقسم بچندین مربع های مستطیل

میکوئیم

میکوئیم جسم را بچندین پارچه که استوانهٔ مضلع باشند تقسیم

و چنانچه در سطح قاعده بین متقابلین خط متوازی بود در جسم

دو سطح متوازی میشوند و همچنانکه ح اندازهٔ مربع سطح فرض

شده بود در اینجا اندازهٔ مکعب جسم فرض میشود اگر سطح مربع

یکی از استوانه های مضلع مفروضه در جسم ح فرض شود

و س ارتفاع آن باشد و ح اندازهٔ مکعب جسم بتمامه

باشد مابین س و ح هم این مساوات که سابقاً در سطح بکار

رفته بود اینجا در جسم هم بکار میرود ح = ا سٓ + ب سٓ + ج سٓ + ---

مثال اوّل میخواهند اندازهٔ مکعب یک استوانهٔ قائمه را

پیدا نمایند که سطح آن ح و ارتفاع آن س باشد چنین

سطح قاعده معلوم است میگوئیم ح = ما = ما

پس اندازهٔ مکعب استوانهٔ قائمه که ح باشد این میشود

$xy = bx = \frac{bx^{+1}}{1^{+1}} = F$ در اینجا حاصل

ضرب اندازهٔ سطح استوانه است بر ارتفاع آن

مثال دویم (شکل ۸۷) فرض میکنیم که

$CA = a$ و $gH = y$ و $cg = x$

و $BD = b$ و $AB = c$ در اینجا از

اربعهٔ متناسبه حاصل است $gH : AE =$

$y : bc = x : a$ یا آنکه $= cg : cH$

و $x\frac{bc}{a} = y$ پس اندازهٔ مکعب جسمی که بالای

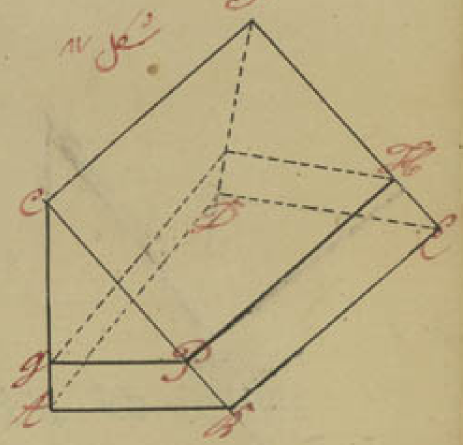
قاعدهٔ y واقع است این میشود $gHEFC =$

$= \frac{bc}{a} \times \frac{x}{1 \times 1} = \frac{bc}{a} \times \frac{x}{2} = \frac{x}{2} \times \frac{bc}{a}x =$

$\frac{xy}{2} =$ اگر فرض نمائیم که سطح y تحویل به

CH شود و ارتفاع x تبدیل به از برای اندازهٔ

مکعب



شکل ۸۷

مکعب جسم بتمامه این حاصل میشود $ABC\,FHC = \frac{abc}{2}$

مثال سیم اگر بخواهند بواسطهٔ این فرمول اندازهٔ

مکعب یک جسم مخروطی را پیدا نمایند باین قسم عمل

میکنند فرض میکنیم b سطح قاعدهٔ جسم مخروطی

باشد و a ارتفاع و y اندازهٔ سطحی باشد که

با قاعدهٔ b متوازی باشد و x فاصلهٔ مابین سطح

y و نقطهٔ رأس جسم مخروطی باشد این اربعهٔ

متناسبه حاصل میشود $y : b = x^2 : a^2$

باین معنی که نسبت قاعده‌های متوازیه بیکدیگر

مثل نسبت مجذور ارتفاع آنها است و در اینجا

$y = \frac{b}{a^2} \times x^2$ پس از برای اندازهٔ مکعب

جسم مخروطی که در بالای قاعدهٔ y واقع است

این حاصل میشود $\frac{b}{a}\times\frac{x^{2+1}}{2+1}=\frac{b}{a}\times\frac{x^3}{3}$

$y\times\frac{x}{3}=\frac{b}{a}x^2\times\frac{x}{3}=$ در حالتیکه $\frac{b}{a}x$ مساوی

شود به a و y مساوی شود به b از برای اندازهٔ مکعب

جسم مخروطی چنانچه که سابقاً هم معلوم شده است

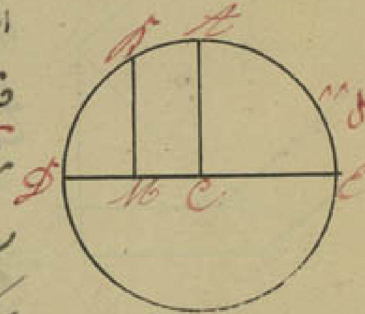
این حاصل خواهد شد در صورتیکه جسم مخروطی P

فرض شده باشد $P=\frac{1}{3}ab$

مثال چهارم شکل اندازهٔ مکعب یک کره را نیز در کمال

سهولت از روی این قاعدهٔ بدیعه میتوان حاصل نمود فرض

میکنیم $x=MC$ و $a=DC$ و $y=\pi\overline{BM}^2$



شکل ۱۱

اگر خیال کنیم شکل $CABMC$ بدور خط

MC حرکت کند بدیهی است که از حرکت او یک قطعهٔ کره

حاصل خواهد شد که آنرا زون zone مینامند که اندازهٔ

مکعب آن

مکعب آن باین طریق پیدا میشود $e=DM\times MC=\overline{BM}^2$

$y=\pi\overline{BM}^2=\pi(a-x)(a+x)=a^2-x^2$

$\pi(a^2-x^2)=\pi a^2-\pi x^2$ از قرار فورمول معلومه

از برای اندازهٔ مکعب قطعهٔ کره این حاصل میشود در صورتیکه

فرض کنیم که اندازهٔ مکعب آن قطعهٔ کره S باشد

$S=\pi a^2\frac{x^{0+1}}{0+1}-\pi\frac{x^3}{3}=\pi x\left(a^2-\frac{x^2}{3}\right)$

اگر فرض نمائیم $x=a$ اندازهٔ مکعب نصف کره

این میشود $\pi a^3-\frac{1}{3}\pi a^3=\frac{2}{3}\pi a^3$

و اندازهٔ مکعب تمام کره این میشود $\frac{4}{3}\pi a^3$

باب چهارم

در علم مثلثات مرکب از خطوط مستقیم که

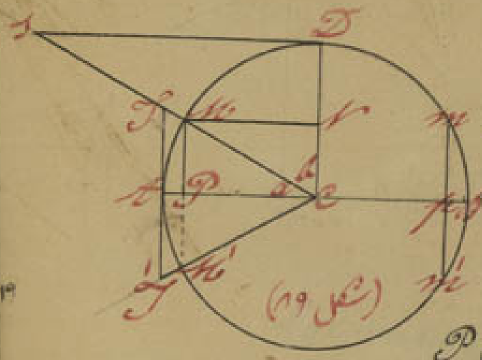
آنرا بزبان فرانسه تریگونومتری لینئر میگویند *trigonometri linere*

فصل اوّل

در اسطلاحات این علم

(۱۳۱) از برای سهولت عمل ساحت چه از برای ساحت صحراها و چه از برای ساحت ولایات به تمامیه علمی اختراع نموده اند که تقریباً در علم ساحت مثل عمل لوکاریتیم است در علم حساب و این از اسطلاحات علم مثلثات تهمید میشود و آن اسطلاحات اینها هستند که بیان میشوند چنان تصوّر میکنند که دایرهٔ احداث نمایند مثل دایرهٔ کشیده شده در ذیل که نصف قطر آن یک واحد باشد

مثلاً



مثلاً یک قوس از یا یک لیو یا یک فرع یا یک فرسخ یا غیر اینها باشند که در آن دایره خطوطی کشیده شود و آنها را با اسامی و اسطلاحات مختلف ملاحظه نمایند (شکل ۱۹) ۱ = CA = CD (که نصف قطر باشد)

PC = cosinus a و MP = sinus a

AP = sinus verse a و AT = tangente a

CN = cosinus b و MN = sinus b

DN = sinus verse b و DS = tangente b

DS = cotangente a

CT = secante a

CS = cosecante a

DN = cosinus verse a

از اینجا دیده میشود که MD = sin a = CN = cos b

و $Pc = \cos a = MN = \sin a$ بایز معنیکه

سینوسلری وکوزینوسلری زاویه‌لرینک که متمم یکدیکریدر یعنی بریم

رفته نود درجه اولورلر باهم مساویدر ازآنجا که بو مثلثلری PMc

و cTA ایزار بوهار متناسبه حاصل اولور $PM : Pc = cA : AT$

یا آنکه $\sin a : \cos a = \tan a : 1$

پس $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$ بایز معنیکه تقسیم کیونک

سینوسی بکزاویه بکو سینوسنه آنک تانژانتی اول زاویه‌نک حاصل

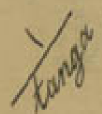
اولور خطی Ad که تانژانتی زاویه‌نک است کو تانژانتی

زاویه مخصوص اولور و از مشابهت مثلثلری cTA و

dAc ایزار بوهار متناسبه حاصل اولور $cA : AT = Ad : dc$

یا آنکه $\tan a : 1 = 1 : \cot a$

پس $\tan a = \frac{1}{\cot a}$ یا آنکه



$\cot a = \frac{1}{\tan a}$ بایز معنیکه تانژانتی

بکزاویه بعینه مساویدر بواحده که تقسیم اولنور بکو تانژانتنه اول زاویه‌نک

وهمچنین کو تانژانتی بکزاویه مساویدر بواحده که تقسیم اولنور

بتانژانتنه همان زاویه‌نک $AP = \sin verse\ a = Ac - Pc = 1 - \cos a$

و $DN = \cos verse\ a = Dc - Nc = 1 - \sin a$

سینوسی بر قوسک که صفر درجه باشد مساویدر صفره و سینوسی

بر قوسک که نود درجه باشد مساویدر بره سینوسی قوس بر که

۱۸۰ درجه باشد مساویدر صفره سینوسی قوسلرینکه از ۱۸۰

درجه اند تا ۳۶۰ درجه با علامت نفی اولنور چونکه انجادیه

اولنور که سینوسی قوس MA مساویدر PM و سینوسی

قوس Dm MA مساویدر mm' وچنین

$MP = mp$ کفته اولنور سینوسلری اولنکه متمم یکدیکریدر تا ۱۸۰ درجه

باهم مساویند کوزینوس از یک قوسیکه صفر درجه باشد مساویست بیک
وکوزینوس از یک قوسیکه نود درجه باشد مساویست بصفر وکوزینوس
از یک قوسیکه ۱۸۰ درجه باشد مساویست به منهای یک کوزینوس
از یک قوسیکه ۲۷۰ درجه باشد مساویست به منهای صفر وکوزینوس
از یک قوسیکه ۳۶۰ درجه باشد مساویست بیک از اینجا دیده میشود
که کوزینوسهای از طرف چپ مرکز با علامت علاوه وکوزینوسهای
از طرف راست مرکز با علامت نفی میشوند تانژانتهای از یک قوسیکه
نود درجه باشد بالانهایت است ـــ میشود وتانژانتهای از قوسیکه
۱۸۰ درجه باشد مساویست بمنهای صفر وتانژانتهای از یک
قوسیکه ۳۶۰ درجه باشد مساویست بصفر از اینجا معلوم میشود
که تانژانتهای که از ربع اول و ربع سیم با علامت علاوه هستند
وتانژانتهای که در ربع دویم وچهارم هستند با علامت نفی میشوند

تانژانت قوسیکه صفر درجه باشد
مساویست بصفر و تانژانت قوسیکه
۴۵ درجه باشد مساویست بواحد

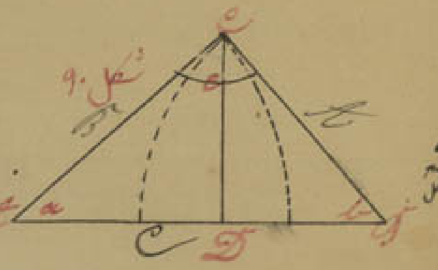
کوتانژانتها

کوتانژانت از یک قوسیکه صفر درجه باشد مساویست بالانهایت
ـــ وکوتانژانت از یک قوسیکه ۴۵ درجه باشد مساویست بیک
وکوتانژانت از قوسیکه نود درجه باشد مساویست بصفر وکوتانژانت
قوسیکه ۱۸۰ درجه باشد مساویست بمنهای بالانهایت وکوتانژانت
از قوسیکه ۳۶۰ درجه باشد مساویست بصفر پس از اینجا معلوم
میشود که کوتانژانتهای از ربع اول و ربع سیم دایره بعلاوه واز ربع
دویم وچهارم منهائی میشوند

(۱۳۲) از برای پیدا کردن اصطلاحات تیرکونومتری بواسطه
لوکاریتم وبکاربردن آنها عملاً آموختن خواهد شد که آنچه در آخر کتاب
لوکاریتم در این باب نوشته شده است بچه قسم میتوان بدست آورد

فصل سیم در پیدا کردن نسبتها بین اضلاع وزوایای مثلثات
مرکبه از خطوط مستقیمه بواسطه اصطلاحات تیرکونومتری

(۱۳۳) از برای پیدا کردن نسبت ما بین اضلاع و زوایای یک مثلث مرکب از خطوط مستقیمه میباید باین قسم عمل نمود (شکل ۹۰)


شکل ۹۰

فرض میکنیم که خط $AB = c$ و $AC = b$ و $BC = a$

و هم چنین تصور میکنیم که از نقطه‌های A و B دو قوس احداث شود که نصف قطر آنها یکی AC و یکی BC باشد از این تساویها

حاصل میشود $AD = AC\cos a$ و $DB = BC\cos b$

و همچنین $AB = AD + DB = AC\cos a + BC\cos b$

پس $AB = AC\cos a + BC\cos b$ (1) این تساوی آخری

که نوشته شد اهم جمیع مطالب است و در او مندرج است جمیع

قواعد علم مثلثات و بهمان قاعده که تساوی (1) نوشته شد

این تساویها را نیز میتوان پیدا کرد $AC = AB\cos a + BC\cos c$ (II)

و $BC = AC\cos c + AB\cos b$ (III)

(۱۳۴) از ضرب کردن هر یک از این سه تساوی در AB و AC و BC

این تساویها حاصل میشود $\overline{AB}^2 = AB\cdot AC\cos a + AB\cdot BC\cos b$

و $\overline{AC}^2 = AB\cdot AC\cos a + AC\cdot BC\cos c$ و $\overline{BC}^2 = AC\cdot BC\cos c + AB\cdot BC\cos b$

از جمع کردن دو تا از این تساویها با هم و تفریق نمودن ثالث را

از آنها این حاصل میشود $2AB\cdot AC\cos a = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$ و $2AB\cdot BC\cos b = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2$

و $2AC\cdot BC\cos c = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2$ و از این تساوی

این تساویها نیز حاصل میشود $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2AB\cdot AC\cos a$ (۲)

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2AB\cdot BC\cos b$ و $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2AC\cdot BC\cos c$

و این تساویات در حق هم هستند از شکل کشیده شده مشخص شده است که

$CD = AC\sin a$ و $CD = BC\sin b$

پس $BC\sin b = AC\sin a = CD$ و این نیز

حاصل میشود $BC : \sin a = AC : \sin b = AB : \sin c$ (۳)

اینست تساویهائی که نوشته شده است مشتمل اند بر کل مثلثات

ولاکن این تساویهائی که نوشته میشوند مخصوص اند بر مثلثات قائم الزاویه

و در مثلث قائم الزاویه AHC میفهمند از تساویهای (۱′)

و (۱″) این حاصل میشود $A = H \sin a = H \cos b$ (۴)

$B = H \sin b = H \cos a$ (۴) و این تساویها عدد ۴ اند

و از مناسبت (۳) این حاصل میشود $A : \sin a = B : \cos a$ بعد

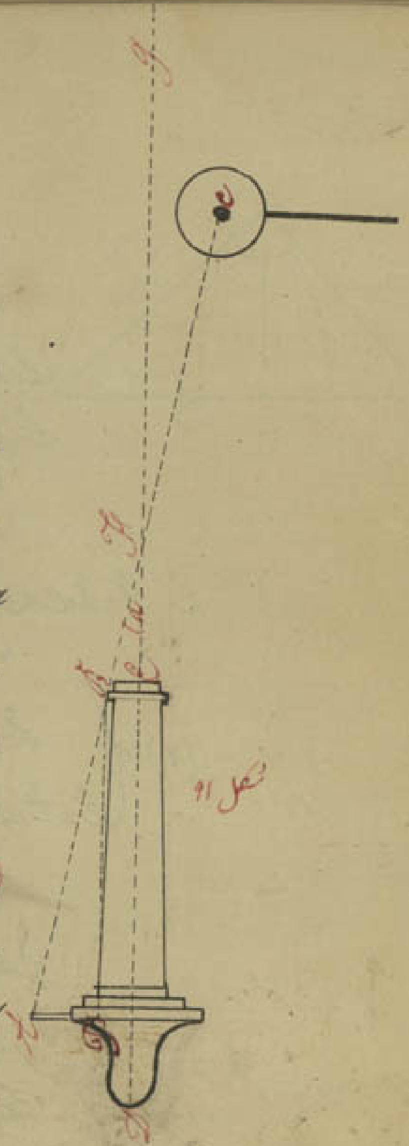
و $A = \frac{B \times \sin a}{\cos a}$ پس

(۵) $A = B \,\mathrm{tang}\, a = B \,\mathrm{cotang}\, b$ ؛ $B = A \,\mathrm{tang}\, b = A \,\mathrm{cotang}\, a$

فصل سیم

در عمل آوردن تساویهائیکه در فصل اول و دوم نوشته شده است

(۱۳۵) هر مثلث مرکب است از شش جزء که عبارت از سه ضلع و سه زاویه باشند و از برای پیدا کردن هر مثلث شناختن سه جزء از آن شش جزء کفایت میکند مثلا (شکل ۹۱) یک ستونی را میخواهند بپیمایند از ارتفاع سر و نقطه سر بنا و میخواهند بدانند که زاویه ارتفاع



شکل ۹۱

ص ۹۱

AHD

DHK که زاویه انعطاف چند درجه است از کشیدن خط KP متوازی با خط HD معلوم میشود که زاویه $DHK = KBP$

و در مثلث KBP خط $KP = BP \,\mathrm{tang}\, a$

یا $\mathrm{tang}\, a = \frac{KP}{BP}$ نصف قطر بنا را مساوی R

و نصف قطر ... را مساوی r و اندازه ارتفاع مساوی a

اینست و حاصل میشود $KP = R - r + a$ فرض میکنیم

$BP = 46,192$ و خط $R - r + a = 2,702$

$\log (R - r + a) = \log 2,702 = 0,4316852$

$\log BP = \log 46,192 = 1,8201055$

$\log \mathrm{tang}\, a = 8,6108797$

و از برای این لوگاریتم که ۸٫۶۱۰۸۷۹۷ باشد در کتاب لوگاریتم

این پیدا میشود که $a = 2° \; 20'$

(۱۳۶) س ۲ یک توپ در روی سطحی قرار گذاشته شده است و بطوری نسبت شده است که محور توپ متوازی است با سطح زمین میخواهند بدانند فاصلهٔ را که خط قراول به افق توپ میخورد چه قدر است فرض میکنیم که این فاصله مساویست x و ارتفاع لولهٔ توپ در بالای افق مساویست p و زاویهٔ که از تقاطع خط قراول و زمین پیش و توپ مرکب شده است مساویست چنان قرار میدهیم که مثلاً (۱) $\alpha = ۴۶$

و ۳۵ ,۴ = p بواسطهٔ این که از مثلثات قائم الزاویه که در مثال ما پیدا شده است این حاصل میشود

$$p = x \text{ tange } \alpha$$

و

$$x = \frac{p}{\text{tange } \alpha} = p \text{ cotange } \alpha$$

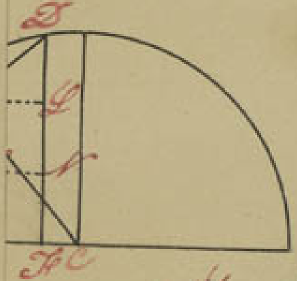
$\lg x = \lg p + \lg \text{cotange } \alpha =$ ۰,۶۳۸۴۸۹۳ + ۱,۹۷۹۹۵۰۰ = ۲,۶۱۸۴۴۸

و $x =$ ۴,۱۵ = ۱۷۳ قدم

(۱۳۷) س ۳ میخواهند بیان نمایند سینوسها و کوسینوسهای

جمع یا تفریق

جمع یا تفریق دو قوس را بواسطهٔ سینوس و کوسینوس قوسهای مفروضه باید معلوم کرد که میخواهند از برای سینوس $(a+b)$ و $(a-b)$ سینوس و $\cos(a+b)$ و $\cos(a-b)$ یک فورمول داشته باشند



شکل ۹۲

(شکل ۹۲) فرض میکنیم $CA = 1$ و قوس $a = AB$ و قوس $b = BD = BK$ پس $AD = a + b$

و $AK = a - b$ و $EC = \cos a$ و $BE = \sin a$ و $DG = \sin b$ و $GC = \cos b$ و $DF = \sin(a+b)$

و $FC = \cos(a+b)$ و $KM = \sin(a-b)$ و $MC = \cos(a-b)$ در همان وقت این تساویها هستند

$$(A)\ \begin{cases} CF = CP - GL \text{ و } DF = GP + LD \\ CM = CP + GL \text{ و } KM = GP - LD \end{cases}$$

این عبارات در کره نوشته شدند و (A) نامیده میشوند از مثلثات

متشابه $P g C$ و $E C B$ این تناسب حاصل میشود

$gP : BE = cP : cE = cg : cB$

یا آنکه $gP : \sin a = cP : \cos a = \cos b : 1$ پس

$gP = \sin a \times \cos b$ و مثلثین متشابهین ECB

و DLg که این مثلث آخر مساویست بمثلث HKg

زیراکه $LD = Hg$ و $gL = KH$ این حاصل

میشود $DL : cE = gL : BE = Dg : cB$

یا آنکه $DL : \cos a = gL : \sin a = \sin b : 1$

پس $DL = \cos a \times \sin b$ از گذاشتن این مقادیر در تساوی اول (ح)

(ح) I

این حاصل میشود $\sin(a+b) = \sin a \times \cos b + \cos a \times \sin b$ — چهار تساوی (ح)

(ح) II $\sin(a-b) = \sin a \times \cos b - \cos a \times \sin b$

(ح) III $\cos(a+b) = \cos a \times \cos b - \sin a \times \sin b$

(ح) IV

(ح) IV $\cos(a-b) = \cos a \times \cos b + \sin a \times \sin b$

(۱۳۸) فرض میکنیم که قوس b مساوی باشد بقوس a این تساویها

حاصل میشود

I
$\sin 2a = 2 \sin a \times \cos a$
$\sin a \times \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$

II
$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - 1 + \cos^2 a = 2\cos^2 a - 1$

و $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$ و $\cos a = \sqrt{\frac{1+\cos 2a}{2}}$

(۱۳۹) در پیدا کردن مثلثات بواسطهٔ تریگونومتری چهار حالت است

اولاً در حالتیکه ضلع و دو زاویه معلوم باشد ثانیاً در حالتیکه دو ضلع

و یک زاویه که مقابل ضلع بزرگتر است معلوم باشد ثالثاً در حالتیکه

دو ضلع با زاویهٔ بینهما معلوم باشد رابعاً در حالتیکه هر سه ضلع

معلوم باشد مثال از برای یک از این چهار حالت که ذکر شد

حالت اول ضلع bc با دو زاویهٔ یک مثلث داده شده اند میخواهند

زاویهٔ سیم را با دو ضلع دیگر که ab و ac باشند بدانند از قرار

(۳) در نمره (۱۳۴) این حاصل میشود $b = \frac{a \sin b}{\sin a}$

و $c = \frac{a \sin c}{\sin a}$ بدیهی است که زاویه سیم مثلث مساوی است

بتفاوت مابین ۱۸۰ درجه و جمع زاویتین معلومتین مثلث فرض

میکنیم $a = ۵۴۸$ و $a = ۴۸° ۱۶' ۱۳''$ و $b = ۶۹° ۱۲' ۳۵''$

و $c = ۶۲° ۳۱' ۲''$ پس $\log a = ۲,۷۳۸۷۸۰۶$

و $\log \sin a = ۹,۸۷۲۹۰۹۳$

$\log \left(\frac{a}{\sin a}\right) = ۲,۸۶۵۸۷۱۳$

$\log \sin b = ۹,۹۷۰۷۶۶۶$

$b = ۶۸۶,۴۹۶$ و $\log b = ۲,۸۳۶۶۳۷۹$

$\log \left(\frac{a}{\sin a}\right) = ۲,۸۶۵۸۷۱۳$

$\log \sin c = ۹,۹۴۷۹۹۶۹$

$c = ۶۵۱,۴۳۱$ و $\log c = ۲,۸۱۳۸۶۸۲$

حالت دویم

حالت دویم ضلعین b و c با یک زاویه b داده شده اند میخواهند ضلع a و زاویتین a و c را معلوم نمایند زاویه c را بواسطه (۳) در نمره ۱۳۴ پیدا میشود $\sin c = \frac{c \sin b}{b}$ و زاویه $a = ۱۸۰ - (b + c)$ و ضلع $a = \frac{b \sin a}{\sin b} = \frac{c \sin a}{\sin c}$ فرض میکنیم که ضلع $b = ۶۸۶,۴۹۶$ و $c = ۶۵۱,۴۳۱$ و زاویه $b = ۶۹° ۱۲' ۳۵''$

$\log c = ۲,۸۱۳۸۶۸۵$

$\log \sin b = ۹,۹۷۰۷۶۶۶$

حاصل جمع $= ۱۲,۷۸۴۶۳۵۱$

$\log b = ۲,۸۳۶۶۳۸۰$

$\log \sin c = ۹,۹۴۷۹۹۷۱$

$c = ۶۲° ۳۱' ۲''$

$a = ۴۸° ۱۶' ۱۳''$

و $\log b = ۲,۸۳۶۶۳۸۰$

$\log \sin a = ۹,۸۷۲۹۰۹۳$

$\log \left(\frac{1}{\sin b}\right) = ۰,۰۲۹۲۳۳۴$

$\log a = ۲,۷۳۸۷۸۰۷$

$a = ۵۴۸$

حالت سیم در صورتیکه ضلعین b و c با زاویه که مابین این دو ضلع واقع شده است معلوم باشد بخواهند ضلع ثالث که a باشد

بزاویتین b و c پیدا نمائید چه قسم عمل میکنند ضلع bc را بواسطه

قاعده (۲) که در نمره ۱۳۴ میتوان پیدا کرد باین طور که $a =$

$\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \times \cos a}$ فرض میکنیم b = ۴۰۰ و c = ۵۰۰ و

$a = \sqrt{۴۰۰۰۰۰ + ۲۵۰۰۰۰ - ۲۰۰۰۰۰ \times \cos a}$ پس a = ۴۸ ۱۶ ۱۳

پس از آنکه از این قاعده bc معلوم شد از قاعده (۳) زاویتین نامعلوم نیز مشخص میشوند حالت چهارم هر سه ضلع اگر معلوم باشند و بخواهند زوایا را مشخص نمائید چه قسم عمل میکنند فرض میکنیم $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$

در این صورت که s را نصف مجموع سه ضلع فرض کرده باشیم

$\sin \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ میشود و $\cos \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$

اگر ثانی را در اولی تقسیم نمائیم این حاصل میشود

$\tan \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$ فرض میکنیم که

a = ۵۴۱ و b = ۶۸۶٫۴۹۶ و c = ۶۵۱٫۴۳۱

پس

پس $2s = ۱۸۸۵٫۹۲۷$ و $s = ۹۴۲٫۹۶۳۵$

و $s - a = ۳۹۴٫۹۶۳۵$ و $s - b = ۲۵۶٫۴۶۷۵$

و $s - c = ۲۹۱٫۵۳۲۵$

$\log (s-c) = ۲٫۴۶۴۶۸۷۰$

$\log (s-b) = ۲٫۴۰۹۰۳۲۳$

حاصل جمع $= ۴٫۸۷۳۷۱۹۳$

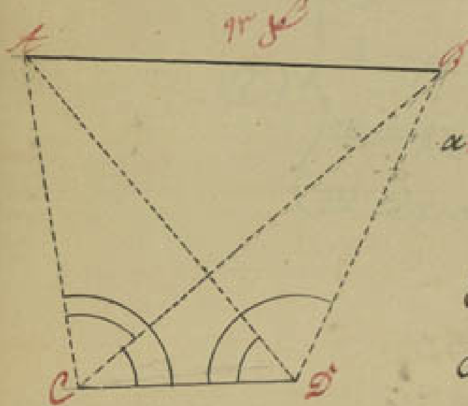
$\log b = ۲٫۸۳۶۶۳۸۰$

$\log c = ۲٫۸۱۳۶۸۵$

حاصل تفریق $= ۱۹٫۲۲۳۲۱۲۸ - ۲۰$

$\log \sin \frac{1}{2} a = ۹٫۶۱۱۶۰۶۴$

$\frac{1}{2} a = ۲۴^{(o)}\ ۸^{(')}\ ۶^{('')}\ ۴^{(''')}$ و $a = ۴۸^{(o)}\ ۱۶^{(')}\ ۱۲^{('')}\ ۸^{(''')}$



مثال (شکل ۹۳) در این مثال فاصله ما بین b و c را که از هم جدا افتاده اند و نمیتوانیم تا بآن دو نقطه ها برسیم پیدا میکنیم باین طریق در محلیکه ایستاده ایم یک قاعده مثلثی احداث میکنیم مثل خط de که فرضاً هزار قوار طولش شد بعد جمیع پنج زوایا که در دو خط

ABC یا مثلث ایسه‌ده بر جهتی بیلمه‌لیم بونده واسطه در مثلث ABC ضلع

... را مشخص ایدوب ودر مثلث ABC ده ضلع ... را معلوم

ایده‌لیم معلوم کوردکده ایکی ضلع بواسطهٔ تساوی (۳) خواهد بولنور

وبالآخره بواسطهٔ تساوی (۲) فاصله ... را پیدا ایده‌لیم

حاشیهٔ اوّل در تساوی‌های بسیار نافع وزیاده مستعمل اولوب درعلم مثلثات

ونتایج آنها اینجا تساوی‌ها ذکر اولنور از تساوی‌های (ج) حاصل اولنور (ح)

تساوی I از تفریق نمودن تساوی III از تساوی IV حاصل اولور

$$ح\ \text{I}\quad \sin a \sin b = \tfrac{1}{2}\cos(a-b) - \tfrac{1}{2}\cos(a+b)$$

تساوی II از جمع نمودن تساوی III و IV حاصل اولور

$$ح\ \text{II}\quad \cos a \cos b = \tfrac{1}{2}\cos(a-b) + \tfrac{1}{2}\cos(a+b)$$

تساوی III از جمع کردن تساوی I و II حاصل اولور

$$ح\ \text{III}\quad \sin a \cos b = \tfrac{1}{2}\sin(a+b) + \tfrac{1}{2}\sin(a-b)$$

تساوی IV

تساوی IV از تفریق نمودن تساوی II از تساوی I حاصل اولور

$$(ح)\ \text{IV}\quad \sin b \cos a = \tfrac{1}{2}\sin(a+b) - \tfrac{1}{2}\sin(a-b)$$

در این تساویات (ح) فرض ایده‌لیم که $a+b = p$ و $a-b = q$

بانکه $a = \tfrac{1}{2}(p+q)$ و $b = \tfrac{1}{2}(p-q)$ اگر در این تساویات

(ح) یجاءی وعوضی‌ها ... آنها را بگذاریم اینجا تساویات (خ) حاصل اولور

(خ)

$$\text{I}\quad \sin p + \sin q = 2\sin\tfrac{1}{2}(p+q)\cos\tfrac{1}{2}(p-q)$$ از تساوی III

$$\text{II}\quad \sin p - \sin q = 2\sin\tfrac{1}{2}(p-q)\cos\tfrac{1}{2}(p+q)$$ از تساوی IV

$$\text{III}\quad \cos q + \cos p = 2\cos\tfrac{1}{2}(p+q)\cos\tfrac{1}{2}(p-q)$$ از تساوی II

$$\text{IV}\quad \cos q - \cos p = 2\sin\tfrac{1}{2}(p+q)\sin\tfrac{1}{2}(p-q)$$ از تساوی I

در تساوی‌های III و IV از تساوی‌های (خ) فرض ایده‌لیم $q = 0$

در این حالت $1 = \cos 0 = \cos q$ وتساوی‌های (ص) حاصل اولور

$$(ص)\ \text{I}\quad 1 + \cos p = 2\cos^2 \tfrac{1}{2}p$$ از تساوی III

ازت و IV ده $1-\cos p = 2\sin^2\frac{1}{2}p$ II (ص)

از تقسیم کیون ت و II (ص) بت و I (ص) اینی حاصل اولنور

$$\tan^2\frac{1}{2}p = \frac{1-\cos p}{1+\cos p} \qquad \text{III (ص)}$$

ازت و II (ص) اینت و حاصل اولنور $\sin\frac{1}{2}p = \sqrt{\frac{1-\cos p}{2}}$ دنور

وازت و $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos a$ ده اینی حاصل اولنور

$\cos a = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ اکر a را ابتدل بر p نالیم اینی حاصل اولنور

$$\sin\frac{1}{2}p = \sqrt{\frac{1-\cos p}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}} = \sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{[a+(b-c)][a-(b-c)]}{4bc}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)}{bc}} \quad \sqrt{\frac{(s-c)(s-b)}{bc}}$$

ازت و I (ص) اینت و حاصل اولنور $\cos\frac{1}{2}p = \sqrt{\frac{1+\cos p}{2}}$

اکر دانجا بر p نک cos را ابتدل بر a نک cos نک مقداری اولان

که $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ باشد جای او یکناریم اینت و یها حاصل اولنور

$$\cos\frac{1}{2}p = \sqrt{\frac{1+\cos p}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}} = \sqrt{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(a+b+c)}{2}\cdot\frac{(b+c+a-2a)}{2bc}} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

اینی ت ده اشکالی نوشته میشو ازت و بهار (خ) حاصل اولنور دنور

از تقسیم کیون ت و I بت و II اینت و حاصل اولنور

$$\text{(ط) I} \quad \frac{\sin p+\sin q}{\sin p-\sin q} = \frac{\tan\frac{1}{2}(p+q)}{\tan\frac{1}{2}(p-q)}$$

واز تقسیم کیون ت و IV بت و III اینی حاصل اولنور

$$\text{(ط) II} \quad \frac{\cos q-\cos p}{\cos q+\cos p} = \tan\frac{1}{2}(p+q)\tan\frac{1}{2}(p-q)$$

واز تقسیم کیون ت و I به III وت و IV به II حاصل

$$\text{(ط) III} \quad \frac{\sin p+\sin q}{\cos p+\cos q} = \frac{\cos q-\cos p}{\sin p-\sin q} = \tan\frac{1}{2}(p+q)$$

$$\text{(ع)} \quad \tan(a\pm b) = \frac{\sin(a\pm b)}{\cos(a\pm b)} = \frac{\sin a\cos b\pm\cos a\sin b}{\cos a\cos b\mp\sin a\sin b}$$

تا و (ع) از تقسیم کیون ت و I (ج) بت و III (ج)

حاصل شود و اگر در این دو هر چهار را بکوسینوس a و کوسینوس b

تقسیم نمائیم این دو حاصل میشود و این دو هم که نوشته میشود

$$(\text{ک}2)\ \text{I}\quad tang(a+b)=\frac{tang\,a+tang\,b}{1-tang\,a\ tang\,b}$$

$$(\text{ک}2)\ \text{II}\quad tang(a-b)=\frac{tang\,a-tang\,b}{1+tang\,a\ tang\,b}$$

$$(\text{ک}2)\ \text{III}\quad cotang(a+b)=\frac{1-tang\,a\ tang\,b}{tang\,a+tang\,b}$$

$$(\text{ک}2)\ \text{IV}\quad cotang(a-b)=\frac{1+tang\,a\ tang\,b}{tang\,a-tang\,b}$$

اگر در دو معادله I و III از دو معادله (ک۲) $a=b$ باشد این دو معادله حاصل شود

$$(\text{ک}2)\ \text{V}\quad tang\,2a=\frac{2\,tang\,a}{1-tang^2 a}$$

و

$$(\text{ک}2)\ \text{VI}\quad cotang\,2a=\frac{1-tang^2 a}{2\,tang\,a}$$

از دو معادله‌ای که بجای نوشته شده اند میتوان دو معادله زیاد دیگر حاصل نمود

از جمع کردن و تفریق نمودن و ضرب کردن و تقسیم نمودن آن دو معادله با یکدیگر

از تبدیل نمودن

از تبدیل نمودن قوسهای a و b و 2a و 2b با نود درجه و صفر درجه

و سی درجه و چهل و پنج درجه و مشتق باشیم و از اینکه $1=\sin 90^\circ$

و $\cos 90^\circ=0$ و $\sin 0^\circ=0$ و $\cos 0^\circ=1$ و $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$

و $\cos 30^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{3}$ و $\sin 45^\circ=\cos 45^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{2}$

و $1=\frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ}=tang\,45^\circ$ و همچنین

قاعده در حل معادلات مخلوط درجه دوم از برای حساب کردن با لوگاریتم

فرم عامه معادلات مخلوط درجه دوم اینست $x^2+ax+b=0$

و $x=-\frac{a}{2}\left(1\mp\sqrt{1-\frac{4b}{a^2}}\right)$ حالا گفتگو خواهیم کرد در

خصوص حالتیکه b با علامت نقطه باشد چونکه tang

از صفر گرفته الی غیر النهایه میتواند بزرگ شود فرض میکنیم که $tang^2\varphi=-\frac{4b}{a^2}$

از اینجا این معادله حاصل میشود $tang\,\varphi=\frac{2}{a}\sqrt{-b}$ پس

$$x=-\frac{a}{2}\left(1\mp\sqrt{1-\frac{4b}{a^2}}\right)=-\frac{a}{2}\left(1\mp\sqrt{1+tang^2\varphi}\right)=-\frac{a}{2}\left(1\mp\sqrt{1+\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}}\right)=-\frac{a}{2}\left(1\mp\frac{1}{\cos\varphi}\right)=-\frac{a}{2}\left(\frac{\cos\varphi\mp 1}{\cos\varphi}\right)$$

اکر ازت و $\frac{2}{a}\sqrt{-b} = \text{tange}\,\varphi$ بجا ایدیم a را پیدا ایدیلیم ایسه

حاصل میشو $a = \frac{2\sqrt{-b}\cos\varphi}{\sin\varphi}$ اکر درت و

$x = -\frac{a}{2}\left(\frac{\cos\varphi \mp 1}{\cos\varphi}\right)$ ساوه a را بکذاریم ایات ور حاصل

$x = -\frac{(\cos\varphi \mp 1)}{\sin\varphi}\sqrt{-b}$ اکر درت و بهار نمرهٔ ۱۳۱

فرض بکنیم $\varphi = 2\alpha$ این ت و جا حاصل میشوا $\cos\varphi = 2\cos^2\frac{1}{2}\varphi - 1$

و $\sin\varphi = 2\sin\frac{1}{2}\varphi \times \cos\frac{1}{2}\varphi$ میشود و اکر ساوه $\cos\varphi$ و $\sin\varphi$ را

در این جزء $\sqrt{-b}$ $x = -\frac{\cos\varphi \mp 1}{\sin\varphi}$ ت و سابق

بکذاریم این قسم میشود $x = -\left(\frac{2\cos^2\frac{1}{2}\varphi - 1 \mp 1}{2\sin\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi}\right)\sqrt{-b}$

پس از بازکردن پارانتز این حاصل میشود $x = -\frac{\pm 1 + 1 - 2\cos^2\frac{1}{2}\varphi}{2\sin\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi}\sqrt{-b}$

اکر نشان علاوه را در این ت و بکیریم چنین میشود

$x_1 = \text{tange}\,\frac{1}{2}\varphi\sqrt{-b}$ اکر نشان منها بکیریم

این میشود $x_{11} = \text{cotange}\,\frac{1}{2}\varphi\sqrt{-b}$

درخصوص

---

^{2} ... نمیتواند بزرگتر شود از یک ... پس فرض میکنیم

درخصوص حالتیکه b با علامت علاوه باشد و $\frac{4b}{a^2}$ بزرگتر

از یک مساوی نشو و چونکه $\sin^2\varphi$ $\sin^2\varphi = \frac{4b}{a^2}$ و $a = \frac{2\sqrt{b}}{\sin\varphi}$

$x = -\frac{a}{2}\left(1 \mp \sqrt{1-\sin^2\varphi}\right) = -\frac{a}{2}(1 \mp \cos\varphi) = -\frac{1 \mp \cos\varphi}{\sin\varphi}\sqrt{b}$

اکر در این ت و نشان منها را بکیریم این حاصل میشو

$x_1 = -\frac{1 - 2\cos^2\frac{1}{2}\varphi + 1}{2\sin\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi}\sqrt{b} = -\text{tenge}\,\frac{1}{2}\varphi\sqrt{b}$

و اکر نشان علاوه را بکیریم این حاصل میشو

$x_{11} = -\frac{1 + 2\cos^2\frac{1}{2}\varphi - 1}{2\sin\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi}\sqrt{b} = -\text{cotange}\,\frac{1}{2}\varphi\sqrt{b}$

درخصوص حالتیکه b با علامت اثبات باشد و $\frac{4b}{a^2}$ بزرگتر از یک

عدد صحیح باشد $1 < \frac{4b}{a^2}$ و $\sin^2\varphi = 1 > \frac{a^2}{4b}$ و

$\sin\varphi = \frac{a}{2\sqrt{b}}$ میشود در این حالت این ت و حاصل میشو

$$x = -\frac{a}{2}\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{1}{\sin^2\varphi}}\right) = -\frac{a}{2}\left(1 \mp \frac{\sqrt{\sin^2\varphi - 1}}{\sin\varphi}\right) = -\frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}\frac{\sqrt{\sin^2\varphi - 1}}{\sin\varphi} =$$

$$= -\frac{a}{2} \pm \sin\varphi\sqrt{b}\,\frac{\sqrt{\sin^2\varphi - 1}}{\sin\varphi} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{b}\sqrt{-1(1-\sin^2\varphi)} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{b}\cos\varphi\sqrt{-1}$$

اگر علامت جمع بگیریم این حاصل میشود $x_1 = -\frac{p}{2} + \cos\varphi\sqrt{q}\,\sqrt{-1}$

واگر علامت تفریق بگیریم این حاصل میشود $x_1 = -\frac{p}{2} - \cos\varphi\sqrt{q}\,\sqrt{-1}$

مثال از برای حالت اول $x^2 + \frac{x}{2} = \frac{99}{16}$ و $x^2 + \frac{x}{2} - \frac{99}{16} = 0$

و $\tan\varphi = \frac{2}{p}\sqrt{-q} = 4\sqrt{\frac{99}{16}} = \sqrt{99} = 9{,}95$

پس $\log\tan\varphi = \log 9{,}95 = 0{,}9978231$

و $\varphi = 84^{\circ}\,15'\,40''$ و $\frac{1}{2}\varphi = 42^{\circ}\,7'\,50''$

چنین $x_1 = \tan\frac{1}{2}\varphi\,\sqrt{-q}$ ودر این حالت

و $\sqrt{-q} = \frac{1}{4}\sqrt{99} = \frac{1}{4}\,9{,}95 = 2{,}4875$

$\log x_1 = \log\tan 42^{\circ}\,7'\,50'' + \log 2{,}4875 = 9{,}9562154 + 0{,}3957631 = 10{,}3519785$

اگر از برای این لوگاریتم که حاصل شده است عدد صحیح بگیریم این حاصل میشود

2,2489 یا 2,25 پس $x_1 = 2{,}25$ مثال از برای حالت دوم

$x^2 - \frac{41}{4}x + \frac{39}{8} = 0$ و چنین $\sin\varphi = \frac{2}{p}\sqrt{q}$ میشود این حاصل میشود

$\sqrt{19{,}5} =$

$\sin\varphi = \frac{2}{p}\sqrt{q} = \frac{8}{41}\sqrt{\frac{39}{8}} = \frac{4}{41}\sqrt{\frac{39}{2}} = \frac{4}{41}\sqrt{19{,}5} =$

$= 0{,}43 = \frac{17{,}64}{41} = \frac{4}{41}\times 4{,}41 =$ و $0{,}6334685 - 1 = \log 0{,}43 = \log\sin\varphi$

و $\varphi = 25^{\circ}\,28'$ و $\frac{1}{2}\varphi = 12^{\circ}\,44' = \sqrt{q}$

$x_1 = \tan\frac{1}{2}\varphi\sqrt{q}$ چنین $= \sqrt{\frac{39}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt{19{,}5} = 2{,}2$

این حاصل میشود $\log x_1 = (\log\tan 12^{\circ}\,44' + \log 2{,}2) =$

$= 9{,}3528763 + 0{,}3424227 = 9{,}6952990$

چون باید از این لوگاریتم از برای گرفتن عدد صحیح ده تفریق کرد پس این حاصل

میشود $0{,}6952990 - 1$ و عدد صحیحش این میشود $0{,}49579$

یا $0{,}5$ پس $x_1 = -0{,}5 = -\frac{1}{2}$ مثال از برای حالت سیم

$x^2 + x + 1 = 0$ ودر اینجا $\sin\varphi$ میشود $= \frac{2\sqrt{q}}{p}$ این حاصل میشود

$0{,}5 = \sqrt{0{,}25} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \sin\varphi$ میشود و $\varphi = 30^{\circ}$ واگر

در تساوی های حالت سیم مساوی p و q را بگذاریم این حاصل میشود

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \times \sqrt{-1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3} = -\frac{1}{2}(1-\sqrt{-3})$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \times \sqrt{-1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3} = -\frac{1}{2}(1+\sqrt{-3})$$

در حل تحویل مساویهای مخلوط درجهٔ ثالثیم

اگر در یک مساوی نامعلوم با اکس پوزان یا قوت ۳ و ۲ و ۱ یا فقط
از قوت ۳ و ۲ باشد اول باید سعی نمود که جملهٔ شامله نامعلوم
قوت دویم از میان برخیزد و از برای بیرون کردن جملهٔ که شامل نامعلوم
قوت دویم است باید بقاعدهٔ که بیان میشود عمل نمود و آن اینست
که کوئفیسیان نامعلوم قوت دویم را با علامتی که دارد تقسیم میکنند
با کس پوزان ۳ و خارج قسمت را با علامت مخالف مقسوم
می نویسند و با نامعلوم اکس پوزان یک اضافه می نمایند در حالتیکه
باز مجدداً علامتش را عوض کرده باشند و بعد آنچه را که حاصل
میشود فرض میکنند که مساوی باشد بیک نامعلوم دیگر در مساوی

بجای

بجای نامعلوم بیک اوّل بعد مساوات آنرا میگذارند و بایستی که
نامعلوم قوت دویم را شامل است از میان میرود مثلاً در مساوی
$x^3 + 3x^2 + x = 0$ از روی قاعدهٔ مذکوره این میشود $-\left(\frac{+3}{3}\right) = 1$
و $y = (x+1)$ پس $y - 1 = x$ پس از آنکه گذاشتی
مساوات x را در مساوی این حاصل میشود $(y-1)^3 + 3(y-1)^2 + y - 1 = 0$
یا $y^3 - 3y^2 + 3y - 1 + 3y^2 - 6y + 3 + y - 1 = 0$
یا آنکه $y^3 - 2y + 1 = 0$ از برای حل این جنس مساویها یک
شکلی می نویسیم که عمومیت داشته باشد و شامل همهٔ اقسام این
مساویها بشود و آن اینست $x^3 + ax + b = 0$ چه در یک نامعلومی
درجهٔ ثالث که قسم اصل یا ریشه موجود است فرض میکنیم که ریشهٔ اول
این باشد $x = y + z$ یا آنکه چنان تصور نمائیم ریشه را
که مجموع میکنیم مساوی باشد بمجموع دو نامعلوم دیگر و اگر در مساوی

مذکوره بجای نامعلوم میگذاریم و مساوات آنرا ابکذاریم این حاصل میشود

$(y+z)^3+a(y+z)+b=0$ یا

$y^3+3y^2z+3yz^2+z^3+a(y+z)+b=0$

یا آنکه $y^3+z^3+b+(y+z)(a+3yz)=0$ و با فرض

میکنیم که تساوی $x=y+z$ در صورتی میتواند حقیقت داشته باشد

که تساوی $a+3yz=0$ نیز حقیقت داشته باشد پس

تساوی اخیره با تحویل میشود باین $y^3+z^3+b=0$ و در تساوی

$a+3yz=0$ نامعلوم z این میشود $z=-\frac{a}{3y}$ پس

تساوی اخیره این میشود $y^3-\frac{a^3}{27y^3}+b=0$ و یا آنکه

$y^6+by^3=\frac{a^3}{27}$ پس $y=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}$ ، ۲

z بعد از تحویل ... ازبرای [illegible]

z این حاصل میشود $z=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}\mp\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}$ و

$z=\frac{-\frac{1}{3}a}{\sqrt[3]{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}}$

$$x=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}$$

و این ریشهٔ اول نامعلوم است و ازبرای پیدا کردن دو ریشهٔ دیگر نامعلوم

را باید باین طریق عمل نمود و ازبرای این تساوی $x^3+ax+b=0$ را

تقسیم نمائیم بحملتین $x-(y+z)$ باین طریق

$(x^3+ax+b=0):[x-(y+z)]=x^2+x(y+z)+a+(y+z)^2=0$

$x^3-x^2(y+z)$

$ax+b+x^2(y+z)$

$-x(y+z)^2+x^2(y+z)$

$ax+b+x(y+z)^2$

$-ax-a(y+z)$

$a(y+z)+x(y+z)^2+b$

$x(y+z)^2-(y+z)^3$

$(y+z)^3+a(y+z)+b=0$

اگر در این تساوی مجهول درجهٔ دوم که از تقسیم حاصل شده ازبرای a عوض مساوی او را که $-3yz$ باشد بنویسیم این حاصل میشود

$x^2+(y+z)x+y^2-yz+z^2=0$ پس

$x=-\frac{y+z}{2}\pm\frac{y-z}{2}\sqrt{-3}$ فرض میکنیم که

$p=-\frac{y+z}{2}$ و $q=\frac{y-z}{2}\sqrt{3}$ اگر

دو ریشه را باین طور تصور نمائیم x_2 و x_3 ازبرای

آنها این حاصل میشود $x_1=-2p$ که جذر اول باشد و $x_2=p+q\sqrt{-1}$

که اصل دویم باشد و $\sqrt{-1}$ ... $= x_3$ که اصل سیم باشد

در بکار بردن این قاعده در چند مثال مخصوص

مثال اوّل $۰ = ۹۴ - ۵۷ن + ۱۲ن^۲ - ن^۳$ از برای

اخراج کردن نامعلوم از قوّت دویم این را می‌نویسیم $x = ن - ۴$

و $ن = x + ۴$ بعد از عملیات مذکوره این می‌شود

$۰ = ۶ + ۹x + x^۳$ در اینجا $۹ = ن$ و $۶ = م$ و از این

می‌شود $y = \sqrt[3]{-۳ + \sqrt{۲۷ + ۹}} = \sqrt[3]{۳}$ و

$z = \sqrt[3]{-۳ - \sqrt{۲۷ + ۹}} = -\sqrt[3]{۹}$ و $p = \frac{۱}{۲}(\sqrt[3]{۹} - \sqrt[3]{۳})$

و $q = -\frac{۱}{۲}(\sqrt[3]{۳} + \sqrt[3]{۹})\sqrt{۳}$ پس $x_1 = \sqrt[3]{۳} - \sqrt[3]{۹}$

و $x_2 = \frac{۱}{۲}(\sqrt[3]{۹} - \sqrt[3]{۳}) - \frac{۱}{۲}(\sqrt[3]{۹} + \sqrt[3]{۳})\sqrt{۳} \times \sqrt{-۱}$

و $x_3 = \frac{۱}{۲}(\sqrt[3]{۹} - \sqrt[3]{۳}) + \frac{۱}{۲}(\sqrt[3]{۹} + \sqrt[3]{۳})\sqrt{۳} \times \sqrt{-۱}$

هر یک از این سه ریشه اگر عوض چهار را فرض می‌شود از برای هر سه مقدار حاصل

خواهد شد

$$\sqrt[3]{-۱۰ + ۶\sqrt{۳}} = \sqrt[3]{۳\sqrt{۳} + \sqrt{۳} + \sqrt{۳} + \sqrt{۳} - ۳ - ۳ - ۳ - ۱} =$$

$$= \sqrt[3]{۳(\sqrt{۳} - ۱) - \sqrt{۳}(\sqrt{۳} - ۱) - \sqrt{۳}(\sqrt{۳} - ۱) + \sqrt{۳} - ۱} =$$

$$= \sqrt[3]{(\sqrt{۳} - ۱)(۳ - \sqrt{۳} - \sqrt{۳} + ۱)} =$$

خواهد شد مثال دویم $۰ = ۲۰ + ۶x + x^۳$ در اینجا $۶ = ن$ و $۲۰ = م$

و $y = \sqrt[3]{-۱۰ + ۶\sqrt{۳}} = -۱ + \sqrt{۳}$ و $z = \sqrt[3]{-۱۰ - ۶\sqrt{۳}} = -۱ - \sqrt{۳}$

$$\sqrt[3]{-۱۰ + ۶\sqrt{۳}} =$$

$$= \sqrt[3]{۳\sqrt{۳} - ۹ + ۳\sqrt{۳} - ۱} =$$

$$= \sqrt[3]{(\sqrt{۳} - ۱)^۳} = \sqrt{۳} - ۱$$

پس $p = -۱$ و $q = ۳$ پس از برای هر سه ریشه حاصل می‌شود

$x_1 = ۲$ و $x_2 = ۱ - ۳\sqrt{-۱}$ و $x_3 = ۱ + ۳\sqrt{-۱}$

در ملاحظات در مخلوط درجه سیم در خصوص اینکه ریشه‌ها نامعلوم حقیقی خواهد بود یا موهومی

و مقدار $x = y + z = \sqrt[3]{-\frac{م}{۲} + \sqrt{\frac{م^۲}{۴} + \frac{ن^۳}{۲۷}}} + \sqrt[3]{-\frac{م}{۲} - \sqrt{\frac{م^۲}{۴} + \frac{ن^۳}{۲۷}}}$ را

با این صورت نیز می‌توان نوشت

$$-(y+z) = \sqrt[3]{\frac{م}{۲}}\sqrt[3]{۱ + \sqrt{۱ + \frac{۴ن^۳}{۲۷م^۲}}} + \sqrt[3]{\frac{م}{۲}}\sqrt[3]{۱ - \sqrt{۱ + \frac{۴ن^۳}{۲۷م^۲}}}$$

در حالتیکه کوفیشان ن در یکی در خصوص با علامت تفریق باشد و جمله $\frac{۴ن^۳}{۲۷م^۲}$ بزرگتر از یک واحد باشد عوض زیر رادیکال با علامت تفریق شده

کمیت موهومی خواهد شد و جواب این از برای پیدا کردن نامعلوم با تقسیم حل

منها نمائیم یقینی است اگر کثر $\frac{۴ ص^{۳}}{۲۷}$ را عکس بنویسیم که باین طور باشد
$\frac{۲۷ ح^{۲}}{۴ ص^{۳}}$ خارج قسمت کمتر از یکواحد خواهد بود پس این کثر را میتوانیم فرض
کنیم که مساویست جیب^{۲} ه یا $\sqrt{\left(\frac{۳ ح}{ص}\right)^{۳}}\ \frac{ح}{۲}$ = جیب ه و بعد از
تحویل صحیح این دو رتبه از برای مجهول حاصل خواهند شد $\sqrt{\frac{ص}{۳}}$ جیب $\frac{ه}{۳}$ ۲ = $س_{۱}$

و $\sqrt{\frac{ص}{۳}}$ جیب $(۶۰ + \frac{ه}{۳})$ ۲ = $س_{۲}$ و

$\sqrt{\frac{ص}{۳}}$ جیب $(۶۰ - \frac{ه}{۳})$ ۲ = $س_{۳}$

در تقسیم کردن یک کره با قطر معین را بچند قسمت متساویه مثلاً به پنج قسمت
مساوی بطوریکه آن قسمت‌ها با یکدیگر متوازی باشند

معلوم است که از برای حل این مسئله اگر نصف کره را به پنج قسمت متساویه
متوازیه تقسیم نمائیم در نصف کره دیگر از همان قرار میتوانیم معمول کرد بدیهی است
اگر از مرکز شروع بتقسیم کردن نمائیم قسمت اول کره یک زون خواهد شد
که قاعدهٔ آن دایرهٔ اعظم کره خواهد بود و همچنین قسمت‌های دویم و سیم و چهارم نیز

هر یک

هر یک یک زون خواهند بود جز قسمت پنجم که یک قطعهٔ کره میشود فرض میکنیم که زون
اول مساوی باشد به ک و زون‌های اول و دویم روی هم رفته مساوی باشند
به ک' و زون‌های اول و دویم و سیم روی هم رفته مساوی باشند به ک'' و زونهای
اول و دویم و سیم و چهارم مساوی باشند به ک''' قسمت اول یا زون ک
$\frac{۱}{۵}$ نصف کره خواهد بود و زون ک' $\frac{۲}{۵}$ و زون ک'' $\frac{۳}{۵}$ و زون ک'''
$\frac{۴}{۵}$ نصف کره خواهد بود و قطعهٔ کره مساوی خواهد شد به تفاوت ما بین
نصف کره و زون ک''' اگر این حاصل تفریق‌ها (ک' − ک) و
(ک'' − ک') و (ک''' − ک'') گرفته شوند زونهای دویم و سیم و چهارم
حاصل خواهند شد و هر یک از این چهار زون‌ها اگر از نصف کره تفریق شوند حاصل
تفریق قطعهٔ کره خواهد بود در باب سیم طریقهٔ پیدا کردن اندازهٔ مکعب
یک زون که قاعدهٔ آن دایرهٔ اعظم کره و نصف قطر آن مساوی ح بود
بیان شد حال اگر فرض نمائیم که ارتفاع زون مساویست به ... این تساوی

حاصل خواهد شد $a^2x\pi - \frac{x^3\pi}{3} =$ حجم و این از همان قرار است

از برای — که در باب سیم ثابت شد و در اینجا موافق آنچه در فوق ذکر شد این چهار معادله حاصل شود

$x^3 - 3a^2x + \frac{2}{5}a^3 = 0$ یا آنکه $\frac{2a^3\pi}{3} \times \frac{1}{5} = a^2x\pi - \frac{x^3\pi}{3}$ I

$x_1^3 - 3a^2x_1 + \frac{4}{5}a^3 = 0$ یا آنکه $\frac{2a^3\pi}{3} \times \frac{2}{5} = a^2x_1\pi - \frac{x_1^3\pi}{3}$ II

$x_{11}^3 - 3a^2x_{11} + \frac{6}{5}a^3 = 0$ یا آنکه $\frac{2a^3\pi}{3} \times \frac{3}{5} = a^2x_{11}\pi - \frac{x_{11}^3\pi}{3}$ III

$x_{111}^3 - 3a^2x_{111} + \frac{8}{5}a^3 = 0$ یا آنکه $\frac{2a^3\pi}{3} \times \frac{4}{5} = a^2x_{111}\pi - \frac{x_{111}^3\pi}{3}$ IV

از برای حل این چهار معادله در جمیع کونوفیان x با علامت نفرا ست

اگر کجا به دیگر مساوی آنها گذاشته شود کمیت واقعه در زیر رادیکال

که این باشد $\sqrt{1 + \frac{4a^3}{27b^2}}$ کمیت موهومی خواهد بود بعلت

اینکه این کسر که عبارت از $\frac{4a^3}{27b^2}$ باشد در مثال مذکوره با علامت

نفی و بزرگتر از یک واحد میشود پس می‌باید این کسر را بالعکس نوشت تا بزرگتر

از یک واحد نباشد و فرض بکنیم مساوی باشد به $\sin^2\varphi$ شود

مثلا

مثلا $\sin^2\varphi$ شود $= \frac{27b^2}{4a^3}$ و $\sin\varphi = \frac{b}{2}\sqrt{\left(\frac{3}{a}\right)^3}$ شود پس

از برای معلوم x در تساوی عامه این حاصل میشود $x = 2\sin\frac{1}{3}\varphi\sqrt{\frac{a}{3}}$

در مثال مخصوص این تساوی حاصل است $\sin\varphi = \frac{2a^3}{5}\sqrt{\left(\frac{3}{3a^2}\right)^3} = \frac{1}{5} =$ ۲ر

و این $\sqrt{\frac{3a^2}{3}}$ در مثال مخصوص ما مساوی میشود به a پس از برای معلوم

x این تساوی حاصل میشود $\log x = \log 2 + \log\sin 3^\circ\ 50'\ 44'' + \log a$

اگر نصف قطر کره را که در اینجا a باشد ۱۰۰ فرض کنیم این حاصل میشود

$\log\sin 3^\circ\ 50'\ 44'' =$ ۸٫۸۲۶۳۸۵۰ (۱۲۵۳) و $\log 2 =$ ۰٫۳۰۱۰۳۰۰

و $\log 100 =$ ۲٫۰۰۰۰۰۰۰ پس $\log x =$ ۱٫۱۲۷۵۴۰۳

اگر عدد صحیح را از حاصل جمع لوگاریتم‌ها تفریق بکنیم و عدد صحیح او را

بگیریم این حاصل میشود $x =$ ۱۳٫۴۱۳۴۴ که از قطع نصف کره باشد

بجهت تساوی II این حاصل میشود $\sin\varphi = \frac{2}{5} =$ ۴ر و

$\varphi = 23^\circ\ 34'\ 41''$ و $\frac{1}{3}\varphi = 7^\circ\ 51'\ 33''$ پس

$\log x_I = \log 2 + \log \sin$ ۷° ۵۱′ ۳۳″ $+ \log$ ۱۰۰ =

= ۲٫۰۰۰۰۰۰۰ + ۹٫۱۳۵۳۸۷۵ + ۰٫۳۰۱۰۳۰۰ =

۱۱٫۴۳۶۹۲۱۰ = اگر ده عدد صحیح را از حاصل جمع این لوگاریتمها

تفریق بکنیم و عدد صحیح حاصل را بگیریم این حاصل میشود ۲۷٫۳۴۷۷۱ = x_I

که مساوی است بر زوال صه بجهت تساوی III این حاصل میشود

۰٫۶ = $\frac{۳}{۵}$ = φ مند و ۱۱″ ۵۲′ ۳۶° = φ و

۲۳″ ۱۷′ ۱۲° = $\frac{1}{3}\varphi$ پس

$\log x_{II} = \log 2 + \log$ ۱۲° ۱۷′ ۲۳″ $+ \log$ ۱۰۰ =

= ۲٫۰۰۰۰۰۰۰ + ۹٫۳۲۷۸۶۱۷ + ۰٫۳۰۱۰۳۰۰ =

۱۱٫۶۲۹۱۱۴۰ = اگر ده عدد صحیح را از حاصل جمع این

لوگاریتمها تفریق بکنیم و عدد صحیح حاصل را بگیریم این حاصل میشود

۴۲٫۵۷۱۰۰ = x_{II} و این عدد ارتفاع از زوال است

ابجد

و بجهت تساوی IV این حاصل میشود ۰٫۸ = $\frac{۴}{۵}$ = φ مند

و ۴۸″ ۷′ ۵۳° = φ و ۳۶″ ۴۲′ ۱۷° = $\frac{1}{3}\varphi$

و $\log x_{III} = \log 2 + \log$ ۱۷° ۴۲′ ۳۶″ +

+ $\log$ ۱۰۰ = ۰٫۳۰۱۰۳۰۰ +

+ ۹٫۴۸۲۹۲۰۸ + ۲٫۰۰۰۰۰۰۰ =

۱۱٫۷۸۴۱۸۸۲ = اگر باز بقاعده که سابق

ذکر شد ده عدد صحیح را از حاصل جمع لوگاریتمها

تفریق بکنیم و عدد صحیح از برای حاصل تفریق

بگیریم این عدد از برای ما حاصل میشود

۶۰٫۸۳۹۸۵ = x_{III} و این عدد

که حاصل شد ارتفاع از زوال صه است

که هر چهار زوال باشد

ارتفاع زون اول ۱۳٫۴۱۳۴۴ =

ارتفاع زون دوم ۱۳٫۹۳۴۲۷ = ...

ارتفاع زون سیم ۱۵٫۲۲۳۲۹ = ...

ارتفاع زون چهارم ۱۸٫۲۶۸۸۵ = ...

و حاصل جمع این چهار زون این میشود ۶۰٫۸۳۹۸۵
اگر این حاصل جمع را از صد که ارتفاع نصف قطر است
تفریق نمائیم ارتفاع قطعهٔ کره حاصل خواهد شد باین طریق

۱۰۰٫۰۰۰۰۰ − ۶۰٫۸۳۹۸۵ = ۳۹٫۱۶۰۱۵

۶۰٫۸۳۹۸۵ + ۳۹٫۱۶۰۱۵ = ۱۰۰٫۰۰۰۰۰

حاشیهٔ دوم در قاعدهٔ پیدا کردن خطوط مثلثات زوایای
از یک ثانیه تا نود درجه و همچنین پیدا کردن از برای این
زوایا خطوط مثلثات آنها را از کتاب لوگاریتم

در قرارداد

در قرارداد و ترتیب جداول لوگاریتم

صفحتین ۲۰۴ و ۲۰۵ مشتملند بر لوگاریتم سینوس‌ها و تانژانت‌ها
و قوسهائیکه هفت رقم اول آنها مساوی اند و لوگاریتم آنها شامل اند
بتمام قسمت از ۰ تا ۶۰ ثانیهٔ دقیقهٔ اول از درجهٔ اول و در صفحهٔ ۲۰۶ تا
۲۲۸ لوگاریتم سینوس و تانژانت جمیع قوسهای از صفر درجه تا یک درجه
و ۳۲ دقیقه مندرج می‌باشند و چنین از برای پیدا کردن لوگاریتم
قوسهای مذکوره از سر صفحه می‌باید ابتدا نمود اگر از زیر صفحه شروع
نموده درجات و دقایق را پیدا نمائید و ثانیه‌ها را از ستون اخری
طرف راست صفحه بگیرید لوگاریتم کوسینوس و کوتانژانت قسمهای
همه قوسهائی را که از ۸۸ درجه و ۲۸ دقیقه اند تا ۹۰ درجه
حاصل میشود در این صفحه‌ها بر هفت رقم‌های تیس لوگاریتم سینوس
نوشته شده اند و از مانتیس لوگاریتم تانژانت نوشته

مگر چهار رقم آخر مانتیس علت اینکه ۳ رقم اول مانتیس لوکاریتم
تانژانت مساویست به ۳ رقم اول مانتیس لوکاریتم سینوس که
با لوکاریتم تانژانت در یک سطر نوشته شده اند اگر پس از چهار رقم
آخر مانتیس لوکاریتم تانژانت یک ستاره کشیده شده باشد
رقم اول آنرا از ۳ رقم اول لوکاریتم سینوس که یک سطر پایین تر
از سطر لوکاریتم تانژانت واقع است میگیرند از صفحهٔ ۲۲۹
تا ۲۶۴ لوکاریتم سینوس و کوسینوس و تانژانت و کوتانژانت
قوسهای تا ۶ درجه ده ثانیه بده ثانیه میشود هر چند و اگر از پایین
صفحه شروع نمایند بقرار مذکور لوکاریتم سینوس و کوسینوس
و تانژانت و کوتانژانت ۶ درجهٔ اخیره را که از ۸۴ درجه تا ۹۰ درجه
باشد حاصل نمایند در طرف چپ صفحه و همچنین در طرف راست
صفحه در هر یک دو ستون هست که در ستونهای طرف چپ ابتدا

از بالا

از بالا نموده در بالای یک h M s و یک c h نوشته شده است
و در ستونهای طرف راست از پایین شروع نموده حروف مذکور را
در ابتدای ستونها نوشته اند و در آن ستونها h M s دال است
بر دقایق و c h بر ثوانی و در اول طرف چپ صفحهٔ ۲۲۹ تا
۲۳۶ یک جدول عمود هست که در بالای آن حروف c h c h
نوشته شده است و آن جدول مشتمل است بر دقایق و ثوانی
که کلاً تحویل به ثانیه شده اند و در پهلوی جدول که بالای او
log sin نوشته شده است یک جدول دیگر هست
که در بالای آن "ا" Diff نوشته شده است و ارقام
آن جدول کلاً کوچک نوشته شده اند مشتمل است به تفاوت
یک ثانیه مابین جدول لوکاریتم تانژانت و لوکاریتم کوتانژانت
یک جدول دیگر هست که در بالای آن "ا" D. بر [illegible]

شده است وارقام آن جدول نیز کوچک نوشته شده اند مشتمل است
بر تفاوت یک ثانیه از برای تانژانت وکوتانژانت در صفحه ۲۳۱ تا
در پهلوی راست جدول لوکاریتم کوسینوس یک جدولی هست که
ارقام آن کوچک نوشته شده اند و در بالای آن ۱" ثانیه نوشته
شده است مشتمل است بر تفاوت یک ثانیه از برای کوسینوس
از صفحه ۲۶۵ تا ۳۰۳ لوکاریتم سینوس ها و کوسینوس ها
و تانژانت ها و کوتانژانت ها زوایا از ۰ درجه تا ۴۵ درجه
دقیقه بدقیقه مندرج اند و در همان صفحه ها لوکاریتم سینوس
و تانژانت و کوسینوس و کوتانژانت زوایا از ۴۵ درجه
تا ۹۰ را می توان پیدا کرد و بغیر از اینکه در این صفحه ها از برای
ثانیه جدولی نیست در سایر قواعد با صفحه هائیکه تا حال ذکر شده اند
تفاوتی ندارند جمیع این خطوط مثلثاتی در یک دایره فرض شده اند

که نصف

۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰
که نصف قطر آن ده هزار ملیان است و لوکاریتم آن ۱۰ فرض شده

در طریق پیدا کردن خطوط مثلثاتی یک زاویه داده شده

(۱) از برای پیدا کردن خطوط مثلثاتی یک زاویه یا زاویه خطوط مثلثاتی
از روی صفحه ۲۰۴ تا ۲۲۸ محتاج بتفصیل و بیان نیست اگر زاویه
داده شده کمتر از شش درجه و زیادتر از ۸۴ درجه باشد و قوسهای
آنها حاوی دقایق بعضی شامل عشریات ثوانی باشد و همچنین اگر
زاویه داده شده زیادتر از شش درجه و کمتر از ۸۴ درجه باشد و
در قوس آن دقایق نیز باشد باز محتاج بتفصیل و بیان نخواهد بود
(۲) اگر بخواهیم لوکاریتم سینوس یک زاویه را پیدا کنیم که کمتر از یک درجه
و ۲۰ دقیقه باشد فرضاً مساوی باشد ۰° ۳۹' ۲۶" باین
طور باید عمل نمود که این زاویه را تحلیل بثانیه نمایند و از صفحه ۲۲۹
تا صفحه ۲۳۶ کوچکترین زاویه اقرب باو را که ۰° ۳۹' ۲۰"

بر شد در کتاب تحویل ثانیه شده است پیدا نمایند عدد ثانیهای

زاویهٔ اول این میشود ۲۹۶۶ و عدد ثانیهای زاویهٔ ثانی اینست

۲۹۶۰ پس از آن لوگاریتم این عددها هر دو را گرفته از یکدیگر تفریق نمود

حاصل تفریق را بلوگاریتم زاویهٔ کوچکتر اقرب جمع نمایند حاصل جمع

لوگاریتم زاویهٔ داده شده میشود مثلاً

lg sin : ۰° ۴۹′ ۲۰″ = ۸٫۱۵۶۸۵۱۷
lg ۲۹۶۶ − lg ۲۹۶۰ = ۸۷۹۴
lg sin : ۰° ۴۹′ ۲۶″ = ۸٫۱۵۷۷۳۱۱

و همچنین lg tang : ۰° ۴۹′ ۲۶″ باین طریق پیدا میشود

lg tang : ۰° ۴۹′ ۲۰″ = ۸٫۱۵۶۸۹۶۴
lg ۲۹۶۶ − lg ۲۹۶۰ = ۸۷۹۴
lg tang : ۰° ۴۹′ ۲۶″ = ۸٫۱۵۷۷۷۵۸

حاصل این دو عمل را بدون تفصیل از صفحه ۲۱۸ میتوان پیدا نمود

و لوگاریتم کوتانژانت ۰° ۴۹′ ۲۶″ را باین طریق پیدا میکنند

lg catang : ۰° ۴۹′ ۲۰″ = ۱۱٫۸۴۳۱۰۳۶
lg ۲۹۶۶ − lg ۲۹۶۰ = ۸۷۹۴
lg catang : ۰° ۴۹′ ۲۶″ = ۱۱٫۸۴۲۲۲۴۲

چنین هرچه قوس بزرگتر شود کوتانژانت کوچکتر خواهد شد پس باید

تفاوت لوگاریتم این دو عدد را از لوگاریتم کوتانژانت پیدا شده

در کتاب تفریق نمود اگر بخواهیم لوگاریتم کوسینوس ۰° ۴۹′ ۲۶″ را

پیدا کنیم باین طریق عمل نمائیم در اینجا باید تفاوت لوگاریتم کوسینوس

۰° ۴۹′ ۲۰″ را از لوگاریتم کوسینوس ۰° ۴۹′ ۳۰″ گرفت

و آن تفاوت ۳ است و این ۳ را باید بشش دهم ضرب نمود و از لوگاریتم

کوسینوس در کتاب پیدا شده تفریق نمود باین طریق

lg cos : ۰° ۴۹′ ۲۰″ = ۹٫۹۹۹۹۵۵۳
۳ × ۶/۱۰ = ۲
lg cos : ۰° ۴۹′ ۲۶″ = ۹٫۹۹۹۹۵۵۱

(۳) اگر بخواهیم لوگاریتم سینوس از یک زاویه را پیدا کنیم که بزرگتر

باشد از ۴۰' ۸۸° باید طریق عمل نمائیم که تفاوت یکتا نیز لوکاریتم
سینوس متعلق بزاویهٔ اقرب و کوچکتر از زاویهٔ داده شود را یافت
نموده و بطریقیکه در نمرهٔ سابق در باب لوکاریتم کوسینوس مذکور شد
عمل را اتمام نمائیم مثلاً

lg sin ۸۸° ۵۳' ۴۰" = ۹,۹۹۹۹۱۹۱
۵ × ۲/۱۰ = ۱

lg sin ۸۸° ۵۳' ۴۲" = ۹,۹۹۹۹۱۹۲

و بجهت پیدا کردن لوکاریتم کوسینوس و لوکاریتم تانژانت و
لوکاریتم کوتانژانت از زاویه هائیکه بزرگتر اند از ۸۸° و ۴۰' بهمان
ستونی را که در بالای او ح ل نوشته شده است از قراری
که در نمرهٔ ۲ گفته شده است عمل نمایند مثلاً

lg cos ۸۸° ۵۳' ۴۰" = ۸,۲۸۵۴۳۱۰
lg ۳۹۸۰ − lg ۳۹۷۸ = ۲۱۸۳

lg cos ۸۸° ۵۳' ۴۲" = ۸,۲۸۵۲۱۲۷

lg tang ۸۸° ۵۳' ۴۰" = ۱۱,۷۱۴۴۸۸۲۹
lg ۳۹۸۰ − lg ۳۹۷۸ = ۲۱۸۳

lg tang ۸۸° ۵۳' ۴۲" = ۱۱,۷۱۴۷۰۶۵
lg cotang ۸۸° ۵۳' ۴۰" = ۸,۲۸۵۵۱۱۸۹
lg ۳۹۸۰ − lg ۳۹۷۸ = ۲۱۸۳

lg cotang ۸۸° ۵۳' ۴۲" = ۸,۲۸۵۲۹۳۵

(۴) اگر بخواهیم لوکاریتم سینوس و کوسینوس و تانژانت و کوتانژانت
زاویه‌ها را که مابین ۲۰' ۱° و ۴۰' ۸۸° واقع شده پیدا نمائیم باید طریق
عمل نمائیم که لوکاریتم در جزو دقیقهٔ داده شده را بعینه در کتاب یافت نموده
و چون ثوانی بعینه در کتاب یافت نمی‌شود لهذا تفاوت مابین لوکاریتم
اقرب و بزرگتر از لوکاریتم داده شده را گرفته بعدد ثوانی داده شده ضرب
می‌نمائیم و حاصل را با لوکاریتم در جزو دقیقه که یافت شده بود جمع
می‌نمائیم مثلاً

lg sin ۱۰° ۳۶' ۰" = ۹,۲۶۴۷۰۳۰
(Diff = ۱۱۲,۴۳) × ۲۵ = ۲۸۱۰۱

lg sin ۱۰° ۳۶' ۲۵" = ۹,۲۶۴۹۸۴۱

log cos ۱۰° ۳۶′ ۰″ = ۹,۹۹۲۵۲۵۰۹
(Diff = ۳,۹۴) × ۲۵ = ۹۸

log cos ۱۰° ۳۶′ ۲۵″ = ۹,۹۹۲۵۱۵۲
log cotang ۸۴° ۲۲′ ۱۰″ = ۸,۹۹۳۸۲۹۸۹
(Diff = ۲۱۵,۷) × ۷ = ۱۵۱۰

log cotang ۸۴° ۲۲′ ۱۷″ = ۸,۹۹۳۶۷۸۸
log tang ۸۴° ۲۲′ ۱۰″ = ۱۱,۰۰۶۱۷۰۲۹
(Diff = ۲۱۵,۷) × ۷ = ۱۵۱۰

log tang ۸۴° ۲۲′ ۱۷″ = ۱۱,۰۰۶۳۲۱۲

(۵) اگر خطوط مثلثاتی قوسهائی را پیدا کنیم که واقع باشند مابین ۹۰ و ۳۶۰ باین طریق عمل نمائیم اگر فرض کنیم که این قوس ه باشد و واقع شده باشد مابین ۹۰ و ۱۸۰ باید خطوط مثلثاتی از برای (ه — ۱۸۰) پیدا نمود و اگر این ه واقع شده باشد مابین ۱۸۰ و ۲۷۰ خطوط مثلثاتی از برای (۱۸۰ — ه) باید گرفت و اگر ه مابین ۲۷۰ و ۳۶۰ واقع شده باشد خطوط

مثلثات

مثلثات از برای (ه — ۳۶۰) باید پیدا کرد

(۶) اگر بخواهیم لوگاریتم خطوط مثلثاتی دایره را که نصف قطر او یک واحد باشد پیدا نمائیم لوگاریتم خطوط مثلثاتی را از کتاب پیدا نموده ۱۰ اعداد صحیح را تفریق نمائیم مثلاً در صورتیکه نصف قطر ده هزار میلیان باشد[۲]

log cos ۸۶° ۲۷′ ۲۰″ = ۸,۷۹۱۱۴۸۵

[۲] این حاصل میشود

ولاکن در حالتیکه نصف قطر دایره یک واحد باشد این میشود

۸,۷۹۱۱۴۸۵ — ۱۰ = ۰,۷۹۱۱۴۸۵ — ۲

در طریقه پیدا کردن زوایا خطوط مثلثاتی داده شده

اگر هر خط مثلثاتی یا لوگاریتم خطوط مثلثاتی داده شده به تمامیه در کتاب یافت شود و اسم آن خط مثلثاتی در زیر آن رقم ها نوشته شده باشد مقدار درجات آنرا در بالای صفحه و مقدار دقائق و ثوانی را در ستون طرف چپ پیدا نمائیم و اگر اسم آن خط مثلثاتی در زیر آن نوشته

شده باشد مقدار درجات آنرا در بالای صفحه و مقدار دقایق و

ثوانی را در ستون طرف راست پیدا نمائیم و اگر بعضی رقم های تیس لوکاریتم

بتمامیه در کتاب یافت نشود مان تیس لوکاریتم اقرب و کوچکتر از

مان تیس لوکاریتم داده شده را پیدا نموده مقدار درجه و دقیقه که

مخصوص مان تیس یافت شده است اخذ میکنیم و تفاوت تیس

لوکاریتم داده شده را از مان تیس لوکاریتم یافت شده کم کرده تقسیم

بر تفاوت یک ثانیه که در کتاب ضبط شده است می نمائیم و خارج قسمت

با درجه و دقیقه که پیدا کرده بودیم جمع یا تفریق می نمائیم حاصل

درجات و دقایق و ثوانی مطلوب است مثلاً

log catang x = ٩,١٧٥٦٨٤٣

log catang ٨١° ٢٩′ ٠″ = ٩,١٧٥٣٦٢٠٢

حاصل تفریق ٣٢٢١

تفاوت از یک ثانیه ١٤٣,٦٤ = ٢٢,٤ حاصل قسمت

پس ٦ ٣٧,″ ٢٨′ ٨١° = x همچنین

log sin x = ٩,٩٣٤٧٦٧٩ از صفحه ٢٢٣ بدست می‌شود

log sin ٠° ٢٩′ ٣٠″ = ٩,٩٣٣٥٤٢٨

حاصل تفریق ١٢٢٥١

تفاوت یک ثانیه ٢٤٤,٦٧ = ٥

پس ٣٥″ ٢٩′ ٠° = x از صفحه ٢١٣ بدون اینکه

عمل همان حاصل میشود اگر لوکاریتم سینوس و لوکاریتم تانژانت

از زاویه های بسیار کوچک داده شده باشند و بخواهیم محققاً ثوانی را

بدانیم باید معنی که ثوانی را با کسور مشخص نمائیم باید طبق از صفحه

٢٠٦ تا ٢٢١ عمل نمائیم مثلاً

log sin x = ٨,٨٢٩٩٢١ از صفحه ٢١٢ این پیدا میشود

log sin ٠° ٢٦′ ١٥″ = ٨,٨٢٨٥١٢

log sin x − log sin ٠° ٢٦′ ١٥″ = ١٤٠٩

log sin ٠° ٢٦′ ١٦″ − log sin ٠° ٢٦′ ١٥″ = ٢٧٥٧

پس $\frac{١٤٠٩}{٢٧٥٧}$ = ٠,٥١ و ١٥,٥١″ ٢٦′ ٠° = x

اگر بخواهیم قوس لوکاریتم خطوط مثلثاتی را پیدا کنیم که

نصف قطر دایره که این خطوط در او مندرج است یکواحد

باشد پس باید ده عدد صحیح بالوگاریتم او جمع نمود در صفحهٔ ۳۰۲
لوحی نوشته شده است که مقدار ثوانی و دقایق و درجات
قوسهائی تا نیز تا ۳۶۰ درجه معین شده است در صورتیکه
نصف قطر دایره واحد باشد

ازیک

فصل چهارم در جغرافیای هندسی

سوال زمین کرهٔ که ما در او زندگانی میکنیم آیا حد و انتها از برای او هست یا آنکه
الی غیر النهایه بزرگ و کشیده شده است

ج بدانکه کرهٔ زمین بملاحظهٔ اول چنان بنظر آید که سطح است الی
غیر النهایه بزرگ و وسیع و همچنین چنان بخاطر میرسد که در زیر او چیزی هست
که او را نگاه داشته است و در بالای او این قبهٔ آسمان با ابر و ستاره‌ها
خودش قرار گذاشته شده است و لی زمین نه سطح است با این طور
و نه در زیر او چیزی است که او را نگاه داشته باشد و هر روز در وقت

نها

صبح دیده شده است که آفتاب از مشرق طلوع نموده و وقت شام در مغرب
غروب می‌نماید و آفتاب و ماه و ستاره‌ها از این طلوع و غروب می‌روند به زیر
زمین و باز می‌آیند بالای روی زمین پس از اینجا معلوم میشود که زمین الی
غیر النهایه بزرگ نیست و هر قدر هم که وسیع باشد باز حد و انتهای
از برای او هست و الا محال بود که انجم بتوانند طلوع و غروب نمایند

س ۲ زمین بر روی چیزی قرار گذاشته شده است و یا آنکه در هوا
معلق می‌باشد

ج زمین بر روی چیزی قرار گذاشته نشده است

س ۳ بچه دلیل زمین بر روی چیزی قرار ندارد

ج بدلیل آنکه اگر خود چیزی خواهد بود که زمین با این عظمت بتواند
بر او قرار بگیرد و خود آن چیز نیز لازم می‌آید که بر چیز دیگر قرار گرفته باشد و هم
چنین تسلسل لازم می‌آید پس زمین را بر روی چیزی تکیه نیست و در هوا

معلق است و با دست نامرئی نگاه داشته شده است و شناختن
آن دست از قوه بشر خارج باشد و آن دست است که او را با نظام عالم بر پا میدارد

س ۴ ترکیب زمین بچه شکل است

ج ترکیب زمین کروی شکل است زیرا که هر وقت در جای بلندی
یا در وسط دریائی استاده و ملاحظه افق را نمائیم مثل دایره بنظر
می‌آید که ما در مرکز آن دایره قرار گرفته باشیم و باین قسم افق را نمی‌توان ملاحظه
نمود مگر در صورتیکه مکان ملاحظه کننده نیز ترکیب دایره داشته باشد

س ۵ بچه دلیل می‌توان فهمید که زمین کروی شکل است

ج بدلایل چندی می‌توان فهمید که ترکیب زمین کروی است

دلیل اوّل وقتیکه مسافر بصحرای صافی میرسد که در پیش روی او
کوهی یا برج بلندی واقع است اوّل چیزی از کوه یا برج را نمی‌بیند مگر
قله کوه یا کلش برج را با وجود آنکه در صحرای صاف است و مانعی از مقابل

ندارد این نیست مگر از کرویت زمین زیرا که آن خطی که مسافر در روی
زمین طی میکند اگر منحنی نشود هر آینه کوه از دامنه و برج از پایه دیده میشد
و همچنین اگر مسافر از دامنه کوهی یا از پای مناره و یا از پای برج دور گردیدن گیرد
ابدا اگرچه در صحرای صافی باشد هر چه دورتر میشود جاهای بلندتر آنها را
می‌بیند تا بجائی میرسد که دیگر از کوه یا برج یا مناره چیزی بنظر او نمی‌آید
از اینها واضحتر آنکه در میان دریا وقتیکه کشتی از دور می‌آید و شخص در کنار
دریا نشسته و ملاحظه میکند اوّل جز نقطه راس دیرک کشتی نمایان
میشود و چیز دیگر آنرا نمی‌بیند بعد هر چه کشتی نزدیکتر میشود بیشتر از آن نمایان
میگردد تا بجائی میرسد که خود کشتی نمایان میشود و همچنین اگر کشتی دور شود
کسی در کنار دریا نشسته و تماشا بکند اوّل همه کشتی را می‌بیند بعد بتدریج
بالاتر آنرا پس از آن دیرک آن را کم کم بجائی میرسد که دیگر هیچ دیده نمیشود

دلیل دوم سفر مجاز خط استوا البته هر کس ستاره‌های مشهور به بنات

اگر بِاعرّاده که در سمت شمال واقع است دیده و شناخته و آن
مرکب است از هفت ستاره بزرگ و روشن که چهار تا از آنها تقریباً
بشکل مربع اتفاق افتاده و آنرا بجای چهار عرّاده کالسکه خیال
کرده اند و سه ستاره دیگر را مثل مال بند کالسکه خیال نموده اند
اگر یک خط مستقیم از دو عرّاده عقبی بکشند و پنج مساوی آن امتداد
دهند آن خط بستاره برّاق دیگر بر میخورد که آنرا بزبان فرانسه
اِتوال پُلِر می نامند یعنی ستاره برّاق و این ستاره چنان که عبارت از ستاره جدی باشد
بنظر می آید که در آسمان همیشه در یکجا ایستاده است با وجود
اینکه سایر ستاره ها خط دایره کوچک یا بزرگ بدور ما طی مینمایند
وقتیکه سفر میکنند در روی زمین از سمت جنوب بسمت شمال که همیشه
در روی یکخط مستقیم باشند و بطرف ستاره برّاق بروند آن ستاره
همیشه در افق بلندتر طلوع میکند که هر چه بسمت شمال بروند ارتفاع

او بیشتر بنظر آید مثلاً در روم این ستاره در افق چهل و دو درجه
ارتفاع دارد و در رستوک دوازده درجه بیشتر ارتفاع دارد
که پنجاه و چهار درجه باشد و فاصله این دو شهر که روم و رستوک
باشند در روی یکخط نصف النهار صد و هشتاد میل جغرافیائیست
که پانزده میل آن مساوی است بیک درجه کره ارض و این صد و
هشتاد میل جغرافیائی مساوی است بدوازده درجه کره زمین
که همان تفاوت ارتفاع این ستاره در آن دو محل است پس
اگر زمین کره نبود این تفاوت ارتفاع در افق بهم نمیرسید دلیل
سیم در سفر کردن بدور زمین بما خوب معلوم شده که مسافرین بدور
زمین همیشه رسیده اند بمکانیکه از آنجا حرکت کرده بودند و در جائیکه
در سمت ملاحظه نموده و از یکسمت رفته باشند همیشه مثلاً
اگر از مشرق بسمت مغرب رفته اند باز بهمانجائیکه اول از آنجا

حرکت کرده بودند رسیده اند معلوم است که اگر زمین کروی نبود
و کرویت نداشت محال بود که باین قسم بشود دلیل چهارم
هر کسی که خسوف ماه را دیده است میداند که سبب آن واقع
واقع شدن ماه است در سایهٔ زمین و این سایه که بر روی ماه
را افتد محسوس است که همیشه بشکل کروی است و این دلیل
خوبی است بر اینکه جسمی که این سایه از او احداث میشود
باید مدور باشد دلیل پنجم از زمانیکه تلسکوب را اختراع کرده اند
و آن یک جور دوربین است بزرگ که از برای ملاحظهٔ کواکب بکار میبرند
و بواسطهٔ آن درست دیده شده است که ترکیب جمیع کواکب
کروی است چون زمین هم یکی از کواکب است لابد جهت
که ترکیب آن نیز کروی باشد

در اسامی خطوط و دوایر که در روی سطح زمین خیال کرده اند

سؤال ششم

س ۶ چه چیز است محور زمین

ج محور آن خط مستقیم است که از نقطهٔ شمال و از مرکز کرهٔ زمین
گذشته و به نقطهٔ جنوب رسیده باشد

س ۷ چه چیز است خط استوی

ج خط استوا دایره است که از مرکز کرهٔ ارض گذشته و عمود است
بر محور در جائیکه این خط گذشته است وسط کره است و کره را بدو قسمت
مساوی قسمت کرده است که نصف فوقانی را نصف کرهٔ شمالی و نصف
تحتانی را نصف کرهٔ جنوبی می نامند

س ۸ کدامند خطوط نصف النهار

ج خطوط نصف النهار دوایر هستند که از سمت شمال
بجنوب و بدور کرهٔ ارض کشیده شده اند و این دوایر عدد شان معین
نیست و نهایت ندارند و هر یکی از این دوایر را اول گرفته اند و فاصله

سایر بلاد را از موضع آن دایره حساب کرده‌اند چنانکه جهت ثبت خط
نصف النهار را که از جزیره فرتو میگذرد خط نصف النهار
اول شمرده‌اند و اهل فرانسه خط نصف النهار که از پاریس میگذرد
اول میدانند و این خطوط را از برای آن خطوط نصف النهار میگویند
هر ولایتیکه در روی یک خط نصف النهار واقع شده‌اند همینکه آفتاب
بوسط آن خط میتابد از برای جمیع آن ولایات ظهر میشود و این دایره نیز
کره را بدو قسمت مساوی قسمت میکند نصفی که طرف مشرق است
نصف کره شرقی و نصف دیگر که در طرف مغرب است نصف
کره مغربی میگویند از نقطه که خط نصف النهار اولی با خط استوی
تقاطع کرده است شروع شمردن درجاتیکه در روی خط استوی
قرار داده شده است میکنند و آن سیصد و شصت درجه است و این
درجات را درجات طول یک مکان میگویند و از نقطه که خط استوی

باخط

باخط نصف النهار اولی تقاطع کرده است شروع شمردن درجاتی
که در روی خط نصف النهار قرار شده است میکنند و آن درجات نیز
سیصد و شصت اند ولی از نود درجه بیشتر نمی شمارند و این درجات را
درجات عرض یک مکان میگویند و این درجات بر دو قسم اند از درجات
طولی آنچه در سمت مشرق اتفاق افتاده اند درجات طول شرقی
و آنچه در سمت مغرب اتفاق افتاده اند درجات طول غربی میگویند
و از درجات عرض آنچه در سمت شمال اتفاق افتاده اند درجات
عرض شمالی و آنچه در سمت جنوب اتفاق افتاده اند درجات عرض جنوبی میگویند

س ۹ کدام اند دو قطب

ج دو قطب عبارتند از دو دایره که یکی در شمال کره واقع است و دیگری
در جنوب کره و متوازیند با خط استوی آنکه در شمال واقع است قطب شمالی
و آنکه در جنوب واقع است قطب جنوبی نامند

س ۱۰ کدامند آن دو دایره که آنها را مدار میگویند

ج آنها دو دایره هستند که در مابین خط استوا و دو قطب واقع شده اند و چنان بنظر آید که آفتاب بحرکت خود در مابین این دو دایره طی میکند آنکه در شمال واقع است مدار جدی و آنکه در جنوب واقع است مدار سرطان میگویند

س ۱۱ کدام است دایرهٔ اکلیپتیک

ج اکلیپتیک دایره ایست که بدور کرهٔ ارض کشیده شده است و در دو جا با خط استوی تقاطع کرده است یکی در سمت مشرق و یکی در سمت مغرب و بهر دو دایرهٔ مدار برمیخورد و این آن دایره است که حرکت آفتاب را بدور او خیال کرده اند که عبارت از منطقة البروج باشد

س ۱۲ کدامند جهات اربعه که در روی کرهٔ ارض تصور شده اند

ج آن جهات عبارت شد از شمال و مشرق و جنوب و مغرب

سوال سیزدهم

س ۱۳ چند زون در روی کرهٔ ارض داریم

ج سه زون در روی کرهٔ ارض هست یکی منطقهٔ منجمد و یکی منطقهٔ معتدل و یکی منطقهٔ محترق ما بین که وسط مدار جدی و سرطان را محترقه و ما بین مدار سرطان و قطب شمالی و ما بین مدار جدی و قطب جنوبی را منطقهٔ معتدله و قطب شمالی و قطب جنوبی را منطقهٔ منجمده میگویند

حرکت زمین بدور محور خود در یک شبانه روز

س ۱۴ زمین چگونه بدور محور خود حرکت می نماید

ج زمین که ما در او زندگانی میکنیم در مدت بیست و چهار ساعت بدور خود اش که همان بدور محور اش است یکمرتبه حرکت میکند و این حرکت از سمت مغرب بسمت مشرق

س ۱۵ بجهة این حرکت که بدور محور خود میکند چه حادث میشود

ج صبح ها زود که ما از خواب برمیخیزیم آفتاب با آن عظمت را

می‌بینیم که از شرق در افق مکان ما طلوع میکند بعد از آنکه تقریباً نصف مدت
مذکور که بیست و چهار ساعت باشد گذشت باز همین آفتاب را ملاحظه
میکنیم که در سمت مغرب غروب نموده از نظر ما ناپدید میشود از برای اینکه سهمی
تماشای بروج را که ما در وقت صبح از طلوع آفتاب کنیم آن طرف
کرهٔ ارض نیز بکنند آیا چه طور میشود این آفتابی که ۳ کرور در مقابل زمین است
بدور زمین حرکت کند البته این خلاف عقل است بلکه آفتاب ثابت است
و زمین در حالتیکه بدور خود حرکت میکند بنظر ما آفتاب را چنان می‌آرد
که یکمرتبه طلوع می‌نماید و یکمرتبه غروب میکند و این روز و شب بواسطهٔ حرکت
زمین بدور محور خودش است

س ۱۶ چند فرسخ جغرافیائی یک نقطهٔ خط استوا در مدت
یک ساعت طی میکند

ج محور زمین تقریباً هزار و هشتصد فرسخ جغرافیائی است دایرهٔ

این

زمین بملاحظهٔ این محور پنج هزار و چهار صد فرسخ میشود حالا بملاحظه
اینکه یک نقطه از نقاط صفحهٔ زمین باید پنج هزار و چهار صد فرسخ دایره را
در بیست و چهار ساعت طی نماید بآسانی تمام فهمیده میشود که پنج هزار و چهار
صد تقسیم به بیست و چهار مساوی است به دویست و بیست و پنج فرسخ
و این مسافتی است که هر نقطهٔ از نقاط زمین که در روی خط استوی
واقع شده است در مدت یکساعت طی میکند

س ۱۷ بچه طریق معلوم میتوان کرد هر مکانی را در روی زمین

ج بواسطهٔ عرض و طول هر بلدی مکان آن بلد در روی کره معلوم میشود

س ۱۸ چه چیز است عرض یک بلد و چند قسم عرض بلد ما داریم

ج یک خطی از خطوط نصف النهار از نقطهٔ تقاطعش با خط استوی
تا قطب شمالی منقسم است بنود درجه و از همان نقطهٔ تقاطع تا بقطب
جنوبی باز منقسم است بنود درجه و این درجات را عرض بلاد میگویند

پس دو قسم عرض بلد ما داریم عرض بلد شمالی و عرض بلد جنوبی

س ۱۹ چه چیز است طول یک بلد

ج خط استوی را مانند سایر دوایر منقسم است بر سیصد و شصت قسمت
مساوی که هر یک از آن قسمت‌ها را یک درجه میگویند در روی کره از جائیکه
خط نصف النهار جزیرهٔ فرو با خط استوی تقاطع کرده است
شروع شمردن درجات مینمایند تا باز بهمان نقطه میرسند و عدد درجات
در سیصد و شصت میشود هر چند درجه از این درجات را طول یک بلد میگویند

س ۲۰ قطر زمین چند فرسخ جغرافیائیست

ج قطر زمین تقریباً هزار و هشتصد فرسخ جغرافیائی است

س ۲۱ دایرهٔ زمین از دور خط استوی چند فرسخ جغرافیائیست

ج دایرهٔ زمین از دور خط استوی پنج هزار و چهار صد فرسخ جغرافیائیست

س ۲۲ ماه از زمین چند فرسخ جغرافیائی مسافت دارد با زمین

ج فاصلهٔ ماه از زمین پنجاه هزار فرسخ جغرافیائی است

س ۲۳ ماه زمین چند قسم حرکت دارد

ج از برای ماه ۳ قسم حرکت هست یکی بدور محور خود
که همان دور خودش باشد و یکی بدور کرهٔ ارض که در هر بیست و هشت روز
یکمرتبه این دوره را طی میکند و یکی بدور آفتاب که این دوره را باتفاق
کرهٔ ارض است و در سالی یکمرتبه این دوره را طی میکند

س ۲۴ از حرکت زمین بدور آفتاب چه رو میدهد

ج از برای جواب گفتن باین سؤال باید آن دایرهٔ خیالی را
که مدار آفتاب مینامند در نظر داشت و در صفحهٔ ممتدهٔ این دایره
که با خط استوی تقاطع میکند در زاویهٔ تقاطعش تقریباً بیست و سه درجه
در جاست زمین حرکت میکند بدور آفتاب و این دو دایره
که مدار آفتاب و خط استوا باشند دو دفعه در ... اشتهار محور را باهم

تقاطع میکنند که یکی از آن نقاط تقاطع در سمت مشرق است
و یکی در سمت مغرب پس از آنکه آنچه گفته شد درست فهمیده
شود میتوان جواب داد که از این حرکت سالیانهٔ زمین بدور آفتاب
چهار فصل رو میدهد یکی بهار و یکی تابستان و یکی پائیز و یکی زمستان
س ۲۵ در چه نقطهٔ از خط استوی آفتاب در این چهار فصل واقع میشود
ج دو نقطه که مدار آفتاب و خط استوی باهم تقاطع کرده اند آنها را
نقطهٔ استوا میگویند بعلت اینکه پس از رسیدن آفتاب بمحاذی
این دو نقطه در تمام روی زمین شب و روز باهم مساوی میشوند و آن دو
نقطه را که عظیم ترین مسافت ما بین مدار آفتاب و خط استوی است
دو نقطهٔ منقلبتین میگویند و این دو نقطه یکی در شمال و محل تقاطع
مدار آفتاب با مدار رأس الجدی است و یکی در جنوب و محل تقاطع
مدار آفتاب با مدار رأس السرطان است و وقتیکه آفتاب بمحاذی

این دو نقطه

این دو نقطه واقع شد چنان بنظر آید که دو باره مراجعت بسمت خط
استوی میکند و وقتیکه آفتاب بمحاذی نقطهٔ استوی میرسد شعاعهای آن
بطور خط عمود بر روی خط استوی می افتد و در آنوقت شب و نهار درست
برابر است در روی ممالک خط استوی و اول بهار است در ممالک
شمالیه یعنی در نصف کرهٔ شمالی و در ممالک جنوبیه که نصف کرهٔ
جنوبیه باشد اول پائیز شود و لیکن در این وقت در کل روی زمین
شب و روز مساوی است و وقتیکه آفتاب بمحاذی نقطهٔ تقاطع مدار
شمس با نقطهٔ مدار رأس السرطان میرسد در آنجا هم از کرهٔ زمین
تابستان میشود و نهایت بلندی روزها است در سمت شمال
و در سمت جنوب زمستان و نهایت کوتاهی روزها است از نقطهٔ
منقلبتین شمالی آفتاب دو باره بسمت خط استوی مراجعت
میکند و مدار آفتاب با خط استوی بعد از شش ماه دیگر تقاطع

میکند پس هر بارهٔ آفتاب بمحاذ نقطهٔ دیگر استوی میرسد و
دوباره در کل روی زمین شب و روز مساوی میشود و از برای ممالک شمالیه
اول پائیز و از برای ممالک جنوبیه اول بهار و از برای ممالک که روی
خط استوی‌اند منتهای شدت گرما میشود پس در سالی دو مرتبه
منتهای شدت گرما میشود در روی خط استوی پس از آنکه سه ماه
از این مدت گذشت آفتاب به نقطهٔ سفلی جنوبیه میرسد
یعنی نقطهٔ تقاطع آفتاب با مدار راس الجدی از برای ممالک
جنوبیه تابستان میشود و منتهای بلندی روزها در آن مملکت میرسد
میرسد و در ممالک شمالیه اول زمستان و منتهای کوتاهی روزها میشود
پس از آنکه سه ماه دیگر گذشت آفتاب باره بمحاذ نقطهٔ دیگر استوی میرسد
و اول سال نو میشود و همیشه بهمین قسم میگذرد چنانچه سالهای
زیاد گذشته است

سؤال بیست ششم

س ۲۶ فاصلهٔ آفتاب از زمین چند فرسخ جغرافیائیست
ج فاصلهٔ آفتاب از زمین تقریباً بیست ملیان فرسخ جغرافیائیست
س ۲۷ چند فرسخ جغرافیائی زمین در بیست و چهار ساعت
در حرکتش بدور آفتاب طی میکند
ج قطر دایرهٔ که زمین بدور آفتاب طی میکند دو مقابل فاصلهٔ
ما بین آفتاب و زمین باید باشد که چهل ملیان فرسخ جغرافیائیست
پس دایرهٔ همچنین قطر میباید سه مقابل آن قطر باشد که صد و بیست
ملیان فرسخ جغرافیائیست و این مسافت همان راهیست که زمین
در مدت یکسال بدور آفتاب طی میکند پس اگر بخواهیم بدانیم که در هر
روز زمین چند فرسخ راه طی میکند صورت عمل این میشود صد و
بیست ملیان تقسیم به سیصد و شصت و پنج مساویست به سیصد و
بیست و هشت هزار و هفتصد و شصت و هشت فرسخ جغرافیائی

۱۲۰۰۰۰۰۰۰ : ۳۶۵ = ۳۲۸۷۶۷

س ۲۸ از حرکت ماه بدور زمین چه رو میدهد

ج از حرکت ماه بدور زمین این حاصل میشود که بعد از غروب آفتاب در مدت شب بنوریکه ماه از آفتاب اخذ کرده است کره ارض را روشن و منور میسازد

س ۲۹ کدامند این چهار ترکیبات و در چه مقام هر یکی از این ترکیبات ها با آفتاب و با زمین اتفاق می افتد

ج ماه در وقت حرکت خودش بدور زمین ما بین آفتاب و زمین اتفاق می افتد این طرف کره از ماه که بسمت ماست از نور آفتاب محروم است و در نظر ما پیدا نیست و آن وقتی است که اول ماه میشود و ماه را بطور هلال مشاهده مینمائیم پس از طی کردن یک ربع از دوره خود بدور زمین یک ربع از جرم او بسمت آفتاب برگشته میشود و کسب نور از آفتاب میکند و از آن بابت است که باین شکل بنظر ما می آید و این را ربع اول ماه میگویند بعد از چند روز نصف کره آن بطرف

آفتاب

آفتاب برگشته و کسب نور را از آفتاب نموده بنظر ما به تمامه منور میشود و آن وقتی است که ماه را بدر میگوئیم و این معلوم است که انور در وسط دوره خود بدور زمین است و از ربع ثالث دوره او بدور زمین چه باره از سمت آفتاب انحراف بهم میرساند زیاده از یک ربع او بنور آفتاب منور نمیشود و در آن وقت باین شکل بنظر ما می آید و این را ربع ثالث میگویند و همچنین تا آخر ماه که نور او از آفتاب کم میشود و همین که اول ماه نو شد همین ترکیبی که گفته شد بنظر ما می آید

س ۳۰ خسوف ماه چه طور میشود که اتفاق می افتد

ج وقتیکه زمین ما بین ماه و آفتاب واقع میشود بطوریکه مرکز این هر سه کره در روی یک خط مستقیم واقع باشد زمین حایل میشود ما بین آنها و مانع میشود از اینکه نور آفتاب بر ماه بتابد و سایه زمین

بر روی ماه می‌افتد و باعث خسوف آن می‌شود

س ۳۱ کسوف آفتاب چه طور می‌شود که اتفاق می‌افتد

ج وقتیکه چنان اتفاق می‌افتد که این هر ۳ کره تقریبا
در روی یک خط مستقیم واقع شوند و ماه ما بین آفتاب و زمین باشد
سایهٔ ماه بر روی زمین می‌افتد و مانع می‌شود ساکنین کرهٔ ارض را
از مشاهدهٔ نور آفتاب و این کسوف گاهی تام می‌شود و گاهی ناقص
و سبب این تفاوت بسته است باینکه مرکز این ۳ کره درست
در روی یک خط مستقیم باشند یا آنکه جزئی انحرافی از یکدیگر داشته باشند

س ۳۲ از چند کواکب سیاره و از چند قمر مرکب است عالم شمسی

ج این زمین که ما در او ساکن شده و نامیکنیم و میخواهیم او را بشناسیم نیست مگر
یک جزء احقر از اجزای عالم شمسی و بغیر از او ده کواکب سیاره
دیگر هستند که هر یک را قمرهای مخصوص هست

مرکز

سؤال ۳۳

س ۳۳ کدامند اسامی این کواکب موافق ترتیبی که از نزدیک آفتاب
حرکت دارند

ج کواکبی که بدور آفتاب متحرک اند و هر یک در روی دایرهٔ مخصوص به
معلوم مدار خود را با تمام میرسانند از قرار ترتیب قرب آنها به
آفتاب اسامی شان مذکور میشود مرکور یعنی عطارد ونوس
یعنی زهره تیر یعنی زمین مرس یعنی مشتری وستا معنی
مخصوص ندارد ژونون همچنین سرس وکذالک پالاس
وهم چنین ژوپیتر یعنی مریخ ساتورن یعنی زحل اوراناس
این نیز معنی مخصوص ندارد

س ۳۴ چه چیز است ذو ذنب

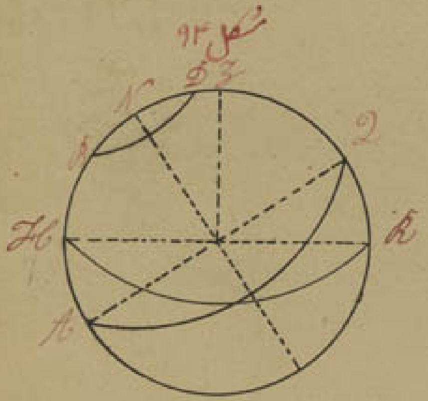
ج ذو ذنب که عبارت از ستارهٔ دم دار باشد از جملهٔ کواکبی است
که حرکتش بدور آفتاب مثل سایر کواکبی که گفته شد نیست بلکه

حرکت آنها از روی یک خط است اهلیلجی شکل
که این خط است بسیار طویل گاهی با آفتاب و زمین نزدیک
میشود و بعد از مراجعتش قرنها طول میکشد تا باز بهمان مقام بیاید

س ۳۵ چند عالم شمسی دیگر در کل عالم وجود دارد

ج این عالم شمسی که ما داریم عبارت است از این آفتاب منور
که حرارتش باعث تربیت موجودات میشود احاطه شده است
از کواکب سیارهٔ چند که هر یک از آنها قمرهای مخصوص دارند و اسامی
سابقاً ذکر شد و بغیر از آنها ذوذنبهای چند دیگر نیز او را احاطه دارند
که بارهٔ اوقات به نظر ما پدیدار میشوند نیست مگر یک عالم کوچکی
از جزو عالم کل بعلت اینکه جمیع این ستاره‌ها که در وقت تاریکی
شب بنظر ما می‌آیند هر یک آفتابی هستند منور و هر یک از آنها کواکب
سیارهٔ چندی هست که بدور آنها حرکت میکنند و آن کواکب سیاره‌ها

بو ۱۰ ط ۲



۹۴

بواسطهٔ بعد مسافت و کوچکی آنها بالنسبه باین ستاره‌ها
که بمنزلهٔ آفتاب آن کواکب محسوب میشوند نمیتوانیم بنظر در آوریم

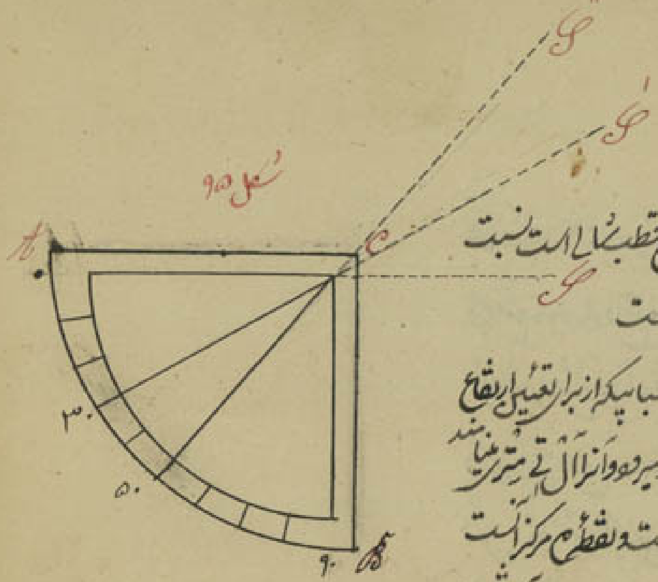
در بیان قواعد چندی که دخل بجغرافیای هندسی دارد

(۱) (شکل ۹۴) در تعیین ارتفاع قطب شمالی از مکانهای
مختلف که ملاحظهٔ قطب نمایند بجهت این در نزدیک قطب شمالی
که ساکن باشد یک ستاره را ملاحظه میکنیم مثلاً ستارهٔ قطب شمالی
که جدی باشد که هرگز از نظر ملاحظه کننده غروب نمیکند و همین واسطه
با جزو محسوس خط نصف النهار ماه مرتبه در مدت بیست و چهار ساعت
تقاطع میکند در وضع اوج او که ... باشد ارتفاع آن ستاره
از ما فوق افق ملاحظه کننده که ... باشد ...
میشود و هوا از ده ساعت بعد یا پس از آن زمان که وضع حضیض او
در نقطهٔ ... واقع است ارتفاع او در ما فوق افق ... میشود

ولاکن چون فاصلهٔ جمیع نقات دایرهٔ [illegible] از قطب شمالی
[illegible] بطور [illegible] راست این حاصل میشود [illegible] = [illegible]
وارتفاع اوج ستاره این میشود [illegible] + [illegible] وارتفاع
حضیض آن این میشود [illegible] − [illegible] پس نصف
حاصل جمع این دو ارتفاع که [illegible] باشد مساوی است با ارتفاع
قطب شمالی نسبت بمکانیکه ملاحظه کننده در آنجا واقع است
و همین ارتفاع مساوی است بفاصلهٔ ما بین مکان ملاحظه کننده و
استوا و همچنین مساوی است بعرض بلد شمالی ملاحظه کننده نسبت
بمکان [illegible] بعلت اینکه [illegible] = [illegible] مثلاً در وینه
پایتخت مملکت استریا ارتفاع اوج و حضیض ستارهٔ شمالی
که جدی باشد ملاحظه کنند ارتفاع اوج این شد ۸ ۴۸ ۴۹

وارتفاع حضیض این	۳۶ ۴	۴۶
وحاصل جمع آنها این	۲۵ ۲	۹۶
ونصف حاصل جمع این	۱۲ ۶	۴۸

و این زاویه



شکل ۹۵

و این زاویه ۱۲ ۶ ۴۸ ارتفاع قطب شمالی است نسبت
بوینه و همچنین عرض بلدان شهر است

(۲) (شکل ۹۵) در بیان اسبابیکه از برای تعیین ارتفاع
قطب شمالی و ارتفاع هر کوکب بکار میرود و آنرا آلت میتری مینامند
شکل [illegible] یکربع دایره است و نقطهٔ [illegible] مرکز آنست
و قوس [illegible] منقسم است بنود درجه و درجات آن منقسم
شده اند بدقایق و در [illegible] نقطهٔ مرکز یک ستارهٔ قرار گذاشته شده است
و در روی آن [illegible] نصب است که میتوان آنرا در روی قوس حرکت داد
ساعت در وقت ملاحظه کوکب این اسباب را بوضعی میگذارند
که سطح [illegible] بطور عمود واقع باشد و نصف قطر [illegible]
بطور عرض اگر در وضع مفروض که [illegible] واقع شده است
ستارهٔ [illegible] در آسمان دیده شود این ستاره آنوقت در افق

ملاحظه کننده خواهد بود یا آنکه ارتفاع او مساوی است بصفر اگر کوکبی
در وضع ۳۰ و ح واقع شده باشد و از آنجا طح در آسمان
دیده شود ارتفاع آن ستاره در افق ح ل ... مساوی میشود به ۳۰°
و اگر کوکبی در وضع ۵۰ و ح واقع باشد ارتفاع ستاره
ح ل ۵۰° میشود و همچنین

(۳) در تعیین ارتفاع خط الاستوا از افق بمکان از شکل اول
واضح است که قوسهای ... علاوه ...
مساوی اند به قوسهای ... + ... ولاکن چونکه قوس
... مساوی است بقوس ... قوس ...
نیز مساوی میشود به ... و ... ارتفاع قطب بالا
میشود از اینکه ۹۰ = ... + ... پس ارتفاع خط
الاستوا از برای ملاحظه کننده که ... باشد ... میشود از اینجا

معلوم

از اینجا معلوم میشود که چونکه ارتفاع قطب که قوس ... باشد مساوی است
به ... با قوس ... که ارتفاع خط الاستوا است متمم یکدیگر
درجه یکدیگر اند درینصورت معلوم شد که ارتفاع قطب یا عرض بلد تاشکند
۴۱° ۱۲′ ۶ میشود پس ارتفاع خط الاستوا درینجا این میشود
۹۰° − (۴۱° ۱۲′ ۶) = ۴۸° ۴۷′ ۴

(۴) در تعیین زاویه که از تقاطع مدار آفتاب با خط الاستوی
حاصل میشود با اسبابیکه سابقاً ذکر شد ارتفاع آفتاب را در
سلستیس تابستان که نهایت بعد او است از خط الاستوی معین
نمایند و در آنوقت فاصله آفتاب از نقطه استوا در سمت نقطه
و وقتیکه آفتاب بدت سلستیس خود رسد در خط نصف النهار با
واقع است در نقطه استوا یکی در شرق و یکی در غرب افق تا واقع
میشوند در این حالت آن جزئیکه از خط نصف النهار ما بین مدار

آفتاب و خط استوی واقع است اندازهٔ زاویهٔ مذکوره که از تقاطع
مدار آفتاب و خط استوی حاصل شده است پس اگر کم کنیم ارتفاع
آفتاب در وقت سلتشمیس آن در خط نصف النهار را ما باید ارتفاع خط
استوی را که بالنسبه بهمان مکان است از ارتفاع آفتاب تفریق نمود
هر چه حاصل شد منتهای بعد آفتاب است از خط استوی و همان
اندازهٔ زاویهٔ تقاطع مدار آفتاب است با خط استوی در رصد
خانهٔ ویژه ملاحظه کردند ارتفاع آفتاب را در سلتشمیس تابستان
این طور معیّن نمودند ۹۱ روز بعد از نوروز که ۲۰ ماه ژوئن باشد
۲۷″ ۱۴′ ۶۵° و بیست و یکم ماه ژوئن ۵۱″ ۱۴′ ۶۵°
و بیست و دویم ماه ژوئن ۵۲″ ۱۴′ ۶۵° و بیست و سیم ماه ژوئن
۲۸″ ۱۴′ ۶۵° پس منتهای ارتفاع آفتاب در ۲۲ ماه ژوئن
میشود که ۹۳ روز بعد از نوروز باشد پس اندازهٔ زاویهٔ مذکوره

این خواهد بود

۹

این خواهد بود ۵۲″ ۱۴′ ۶۵°

۵۲″	۱۴′	۶۵°
۲۴	۴۷	۴۱
۲۸	۲۷	۲۳

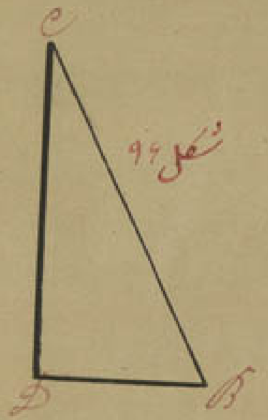
(۵) در تعیین اندازهٔ زاویهٔ مذکوره و ارتفاع قطب با هم ارتفاع
آفتاب را در هر دو سلتشمیس آن که تابستان و زمستان باشد
ملاحظه نمایند بدیهی است که در آنوقت خط استوی را درست
در وسط آنها و نقطه واقع است در مدت سلتشمیس تابستان
زاویهٔ ارتفاع آفتاب چنانچه دیده شد مرکب است از زاویهٔ ارتفاع
خط استوی بعلاوهٔ زاویهٔ تقاطع مدار آفتاب با خط استوی
و در مدت سلتشمیس زمستان ارتفاع آفتاب مرکب است
از ارتفاع زاویهٔ خط استوی منهای اندازهٔ زاویهٔ تقاطع مدار
آفتاب با خط استوی اگر ارتفاع خط استوی ح هم باشد
و اندازهٔ زاویهٔ تقاطع مدار آفتاب با خط استوی ع و ارتفاع

در سلخ تیر تابستان این میشود ج م + ج ع و در سلخ دی زمستان این ج م − ج م نصف حاصل جمع آنها ج م میشود که ارتفاع خط استوا است که اگر از ۹۰ تفریق نمائیم ارتفاع قطب حاصل خواهد شد و نصف حاصل تفریق آنها ج م میشود که اندازهٔ زاویهٔ تقاطع مدار آفتاب است با خط استوا مثلاً در دینه ملاحظه کرده‌اند که ارتفاع آفتاب در سلخ تیر تابستان این است ۵۲″ ۱۴′ ۶۵° و در سلخ دی زمستان این ۵۶″ ۱۹′ ۱۸° نصف حاصل جمع این مقادیر این میشود ۲۴″ ۴۷′ ۴۱° و نصف حاصل تفریق آنها این ۲۸″ ۲۷′ ۲۳° پس ارتفاع قطب بلخ چنانچه سابقاً بیان شد این میشود ۳۶″ ۱۲′ ۴۸° = (۲۴″ ۴۷′ ۴۱°) − ۹۰

(۶) در تعریف [illegible] و آن اسبابی است که در زمان

سابق

۹۲



شکل ۹۶

۹۶ سابق بجهت تعیین ارتفاع آفتاب بکار می‌برند چنانچه در شکل نمود میشود اگر [illegible] باشد D C ارتفاع یک ستون عمود که فرضاً طول آن ۳۰ باشد و D B طول سایهٔ عرض او باشد که مثلاً مساوی به ۱۵ اگر خط نظری B C را تصور نمائید که از نقطهٔ B بنقطهٔ C کشیده شده است یک مثلث قائم الزاویه حاصل میشود که در آن مثلث از معلوم شدن زاویهٔ B ارتفاع آفتاب معلوم میشود علت اینکه چشم که از نقطهٔ B مرکز آفتاب را [illegible] در امتداد خط C B خواهد دید پس آفتاب ارتفاع C D B که ارتفاع واقعه در فوق افق B D باشد واقع است و زاویهٔ B را بواسطهٔ این [illegible] میتوان معلوم نمود

$۲ = \frac{۳۰}{۱۵} = \frac{CD}{BD} = \tan B$ از [illegible] زاویه [illegible] متعلقه باشد در کتاب این زاویه میشود ۵٬۸۲″ ۲۶′ ۶۳°



(۷) (شکل ۹۷) کدام است پارالاکس قمر و چه بکار می آید و چگونه
می توان آن را پیدا نمود پارالاکس قمر عبارت است از زاویه که حاصل
شده باشد از مد نظر بیننده که از مرکز قمر نصف قطر کرهٔ ارض را
ملاحظه نماید و این پارالاکس را در حالتی عرض می نامند که یکی از آن
دو خط نظر که زاویه از آنها مرکب شده است عمود باشد به نصف
قطر ارض مثلاً خط ح ر که عمود است به نصف قطر ح ر
در حالتیکه ح [illegible] دایرهٔ اعظم کرهٔ ارض و ح مرکز آن
و ح مرکز قمر باشد زاویه ح [illegible] پارالاکس عرض قمر بوده و قوس
[illegible] و امتداد [illegible] آسمان فرض شود باشد منجمین پارالاکس
قمر از آن بابت محتاجند که بواسطهٔ آن فاصلهٔ شمس و قمر را از کرهٔ
ارض میتوانند معلوم نمایند از برای پیدا کردن پارالاکس قمر با این
طور عمل می نمایند که در روی کرهٔ ارض یک مکان مشخص میکنند مثل نقطهٔ

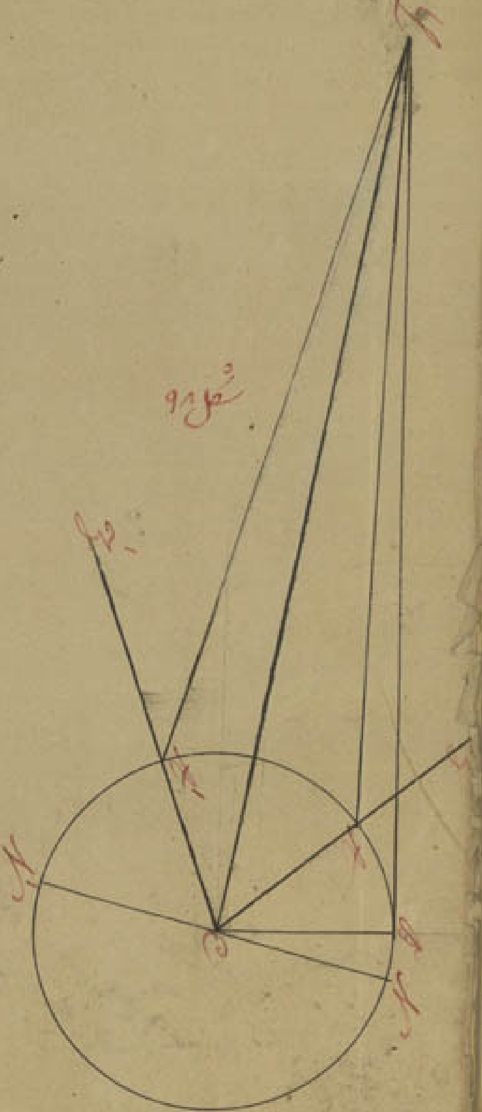
ح که از آنجا قمر [illegible] را در فوق رأس ح که در امتداد نصف قطر
ح ر باشد ملاحظه نماید و در یک مکان دیگر مثل [illegible] معین میکنند
که در همان لحظه از این نقطه قمر [illegible] را در افق [illegible] که [illegible] باشد
ببینند باید جهت این تجربه با هم متفق شده یکی به نقطهٔ [illegible] [2] قمر [illegible] را در فلک
در نقطهٔ [illegible] مشاهده نموده اندازهٔ قوس [illegible] را معین میکند و ملاحظه
کننده [illegible] که قمر [illegible] را در فلک در نقطهٔ [illegible] مشاهده میکند اندازهٔ قوس
[illegible] را معین می نماید پس از آنکه آن دو ملاحظه کننده پیش هم آمدند
هر یک اندازهٔ قوس معینی که به خود را بیان نموده حاصل تفریق آن دو قوس را
که قوسین [illegible] و [illegible] باشند میگیرند و قوس [illegible] حاصل
میشود و این قوس اندازه است از برای زاویهٔ [illegible] که مساوی است
با زاویهٔ [illegible] و این زاویه پارالاکس عرض قمر است که [illegible]

قاعدهٔ دیگر در پیدا کردن پارالاکس قمر

[2] و دیگری به نقطهٔ [illegible] میروند و هر یک از آنها
در وقت معین فاصلهٔ قمر را از یک ستاره ثابت
[illegible] معین می نمایند تقریباً که ملاحظه کنندهٔ
نقطهٔ [illegible]

اگر نقطه ب باشد و ح مرکز کره ارض و ا و ر قطب آن ملاحظه کنندهای ح و ر هر یک از آنها در یک سمت خط استوا اگر یکی در شمال و دیگری در جنوب آن واقع باشند و هر دو در یک خط نصف النهار باشند که ا ر نصف النهار ر باشد بقسمیکه قمر در آن واحد از برای هر دو ملاحظه کننده در یک نقطه بوضع او پیدا شده از برای ملاحظه کننده ح امتداد نصف قطر ا تا نقطه ح خط عمودی شود و نقطه ح را زنیت نقطه ح نامند و همچنین از برای ملاحظه کننده ر نقطه ر را زنیت نقطه ر نامند هر دو ملاحظه کننده هر یک از برای اندازه زاویه که از خط عمودی مذکور و خط نظر که از ملاحظه قمر حاصل شده است میگیرند که یک زاویه ح و دیگر زاویه ر باشد ملاحظه کننده ح باید طریق حساب نماید

جب ا + جب ح = جب ا ح پس



شکل ۹۱

جب ح - جب ا = جب ر ولاکن زاویه ر نیست مگر درجه عرض شمالی از برای ملاحظه کننده ح پس اندازه آن زاویه معلوم است و ملاحظه کننده ر باید طریق حساب میکند

جب ر + جب ا = جب ا ر پس

جب ر - جب ا = جب ا و در اینجا زاویه جب ر نیز چونکه درجه عرض جنوبی است لابد معلوم است و قسمیکه هر دو ملاحظه کننده پس هر جمع میشوند بجهت خاطر جمع شدن از محاسبه خود شان حساب مفصله ذیل را شامل امتحان صحت و مقسم عمل ثابت خود می نمایند جب ا - جب ح + جب ر = جب ا ر = جب ا + جب ر + جب ا

باید معرفت که زاویه جب ح را میتوان حاصل نمود از تفریق کردن فاصله از زنیت قمر درجه عرض شمالی را و همچنین زاویه ر را میتوان حاصل نمود بتفریق نمودن از حاصل جمع هر دو فاصله از زنیت قمر حاصل

جمع هر دو درجهٔ عرض اگر شمالی و جنوبی باشد اگر یکی شمالی و دیگری جنوبی باشد

بواسطهٔ زاویهٔ CLA یا زاویهٔ CLA پارالاکس

عرض قمر یا زاویهٔ CLA' را باین طریق پیدا نمایند در مثلث

CLA این اربعهٔ متناسبه وجود دارد $= LC : CA$

$LA : \sin ZAL = \sin ALC$ و در مثلث مقابل این نیز

CLA' این اربعهٔ متناسبه هست $\sin A'LC = LC : CA'$

یا آنکه $\sin A'LC : A'C = CL : CA$ پس از این

دو اربعهٔ متناسبه این اربعهٔ متناسبه حاصل میشود

$\sin ALC : \sin ZAL = \sin A'LC : AC$

$\sin A'LC = \dfrac{\sin ALC \times AC}{\sin ZAL}$ و

مثلاً فرض میکنیم که از برای ملاحظه کننده که در درجهٔ عرض شمالی مساوی

باشد به ۳۰° ۹' که مساوی است بزاویهٔ CLA

وچنان

و چنان تصور میکنیم که از برای فاصلهٔ زینیتی قمر ۳۰° پیدا کرده باشد

محاسبهٔ او باین طریق میشود $ALC = ZAL - ACL$ = ۳۰° − ۲۹° ۳۰' = ۳۰'

از برای ملاحظه کننده که در درجهٔ عرض جنوبی آن که CLA باشد

مساوی است ۱۹° ۸' و از برای فاصلهٔ زینیتی قمر چنان تصور میکنیم

که اینرا حاصل کرده باشد ۱۹° ۲۸' = $LA'Z$ پس محاسبهٔ

او نیز باین طریق میشود $A'LC = ZA'L - A'CL$ = ۱۹° ۲۸' − ۱۹° ۸' = ۲۰'

و محاسبهٔ ملاحظه کننده از این قرار است $ALA' = ZA'L + ACA'$

$ZA'L - ACA'$ = ۳۰' + ۱۹° ۲۸' − ۴۸' ۳۱' = ۵۰'

چونکه حاصل جمع زاویتین ALC و $A'LC$ در حقیقت

مساوی است به ۵۰' باید محاسبه صحیح باشد پس پارالاکس عرض قمر از این میشود

$\sin A'LC = \dfrac{\sin ALC \times AC}{\sin ZAL} = \dfrac{\sin 30' \times AC}{\sin 50'}$

یا اگر $\log \sin A'LC = \log \sin 30' + \log AC - \log \sin 50'$ = ۷٫۹۴۰۸۴۱۹ + ۱۰

۹٫۶۹۸۹۷۰۰

۸٫۲۴۱۸۷۱۹

وزاویهٔ $\hat{a}$ = CLE

(۸) قاعدهٔ پیدا کردن فاصلهٔ قمر از مرکز کرهٔ ارض در شکل ۹۸ از مثلث

قائم الزاویهٔ CLE این تناسب حاصل میشود

$CL : EC = 1 : \sin ELC$

یا آنکه $CL : 900 = 1 : \sin \hat{a}$

$\log CL = \log 900 - \log \sin \hat{a} = 2{،}9542425 + 10$

$8{،}2418553$

$CL = 51569$ فرسخ جغرافیا و $4{،}7123872$

(۹) (شکل ۹۹) در حساب کردن فاصلهٔ شمس از کرهٔ ارض

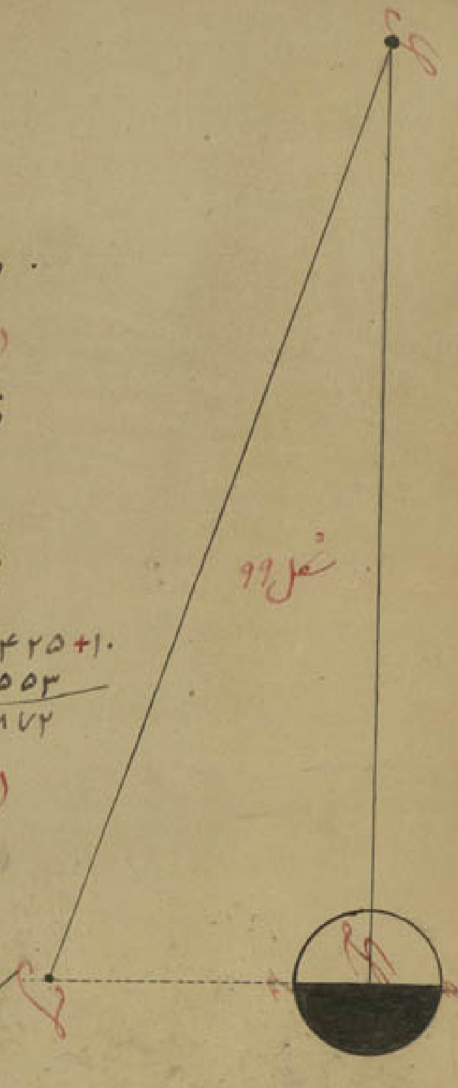
از اشکال مختلفهٔ قمر یک قاعدهٔ مختصر بجهت پیدا کردن این فاصله

میتوان حاصل نمود در ربع اول یا ربع آخر قمر که نصف آن بتمامه

کسب نور از آفتاب میکند می باید وقتی را مشخص نمود خطیکه مابین جزء

منور و جزء تاریک قمر واقع است و در ابتدا این خط منحنی است بخط

مستقیم



شکل ۹۹

مستقیم میشود مثل خط ... که محور کرهٔ قمر است در این هنگام خطیکه

از مرکز ارض بمرکز قمر کشیده میشود عمود است بر خطیکه از مرکز قمر بمرکز

آفتاب کشیده میشود فرض میکنیم S آفتاب و L قمر و T کرهٔ ارض

باشد از مثلث قائم الزاویهٔ TLS این تناسب حاصل

میشود $1 : \cos T = TL : TS$ یا آنکه

$1 : \cos 89^\circ 51' 8'' = 51569 : TS$ و

$TS = \dfrac{51569}{\cos 89^\circ 51' 8''}$ و یا آنکه

$\log TS = \log 51569 - \log \cos 89^\circ 51' 8'' = 4{،}7123872 + 10$

$7{،}4114860$

پس $7{،}3009012$ فرسخ جغرافیا $TS = 19995000$

(۱۰) در طریقهٔ پیدا کردن درجات طول یک مکان بواسطهٔ کرونومتر

که عبارت از ساعت بخوبی باشد از جمیع اهم اعمال است

که شخص بتواند مکانی را که در روی سطح زمین در آن مکان واقع است

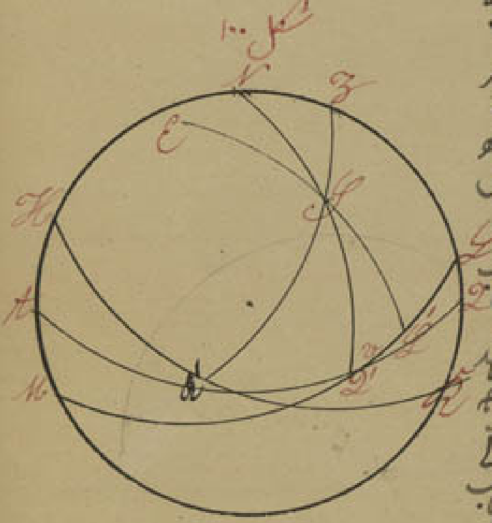
معلوم نماید و این فقره از برای مسافرین دریا که عبارت از ملاحین
و کشتی بانان باشد الزم اعمال است تا باین واسطه بتوانند در بنادر بلکه
صفرهائیکه ندیده اند و نابلد اند بجز آسمان و آب در اطراف خود چیزی را
مشاهده نمی نمایند هر روز و هر ساعت مکان کشتی خود را معین نمایند
تا باعث درست بردن کشتی شده و سبب احتراز از سنگها و جاهای
کم عمق که مشهود در حول و حوش کشتی باشد شده باعث شکست
و غرق آن کشود طریقه پیدا کردن او در و بنا دیگر طول یا درجات
عرض آن بواسطه یک قاعده مختصر سابقا ذکر شد حال طریقه پیدا
کردن آسیس یکمکان که عبارت از درجات طول آن باشد
بیان میشود فرض میکنیم مسافر دریائی بواسطه وقوع طوفان حجم
و کشتی خود را در دریائی که هرگز ندیده بود و بلدیت نداشت و در
طول و عرض آنجا نمی دانست ملاحظه نمود در اول روشنی افق از ...

عرض بلد مکانی را که واقع بود ۱۰ درجه شمالا پیدا کرد و در همان
وقت از برای ساعتی که در جزو عرض بلد را مشخص کرده بود ارتفاع
آفتاب یا یک کوکب معلوم را از خط نصف النهار مشخص میکند بعد تحقیق
فرض مینمائیم که در آنوقت از ساعت او هشت ساعت و بیست و
دقیقه و پنجاه ثانیه از دست گذشته بود در روزنامچه منجمین و کشتی بانها
از برای جمیع درجات یا از برای جمیع ارتفاعات آفتاب یا یک
ستاره معینه یک لوح هست که در آن لوح در پهلوی ارتفاع
آفتاب یا کوکب معلوم ساعات و دقایق و ثوانی متعلق بآن
ارتفاع نوشته شده است بعد از این کشتی بان از برای وقت ملاحظه
نموده ۱۶ ساعت و ۳۰ دقیقه و ۲۰ ثانیه از ظهر گذشته دیده
بود که عبارت است از ۴ ساعت و ۳۰ دقیقه و ۲۰ ثانیه از نصف
شب گذشته و در این وقت از ساعت او که باعث پاریس

معادله که بود در پاریس ۸ ساعت و ۲۶ دقیقه و ۵۰ ثانیه
از ظهر گذشته بود و این گشتربان مدتی را که در پاریس بود همه روزه
ترونومتر خود را با ترونومتر رصدخانه میزان میکرد و میدید که هر روز
موافق قاعده ترونومتر او دو ثانیه تندتر از ترونومتر رصدخانه میرفت
و روز دیگر از پاریس بنا بر رفتن داشت حساب کرده دید که مدت توقف
او در آنجا ترونومتر او ۳ دقیقه تندتر رفته بود و از آن وقت تا بجائی
که ملاحظه ارتفاع را کرد چهل روز گذشته بود پس ترونومتر او که
یک قاعده و یک نوع میرفت باید این قدر تندتر رفته باشد ۲۰″ ۱′ = ۸۰″ = ۴۰ × ۲
از این قرار ترونومتر گشتربان در روز ملاحظه این قدر تندتر رفته بود
۲۰″ ۴′ = ۲۰″ ۱′ + ۳′ و لا کن وقت ملاحظه ارتفاع آفتاب
در ترونومتر ۸ ساعت و ۲۶ دقیقه و ۵۰ ثانیه از ظهر گذشته بوده
پس آن وقت در پاریس از برای ملاحظه ارتفاع این قدر باید از ظهر گذشته باشد

۲۰″

۳۰″ ۲۲′ ۸ساعت = ۲۰″ ۴′ − ۵۰ ۲۶′ ۸ساعت پس گشتربان از برای
مشخص کردن درجات طول مکانی را که واقع است باید فرق حساب نماید
۵۰″ ۷′ ۸ = ۳۰″ ۲۲′ ۸ساعت − ۲۰″ ۳۰′ ۱۶ساعت یا آنکه
حاصل تفریق را بجهت حصول درجات به ۱۵ ضرب نماید این حاصل میشود
۳۰″ ۵۷′ ۱۲۱° و این درجه طول همان مکان است



(۱۱) (شکل ۱۰۰) بچه واسطه میتوان در آسمان مقام آفتاب
و ستاره ها را معین نمود و چگونه میشناسند آنها را (ج) اگر نقطه
ح مکان ملاحظه کننده HH افق آن و [illegible] قطب آسمانی
ح ح خط استوا م قطب مدار آفتاب ک ک مدار خود آفتاب
و ی نقطه تقاطع مدار آفتاب و خط استوا باشد یا آنکه وقت
استوای لیل و نهار در فصل بهار باشد از برای مشخص کردن مکان
یکی گنبد آسمان بعضی دوایر موهومه بکار برده میشوند که آنها را

دایرهٔ اعظم کره می‌نامند اگر بعد باشد ... یک کوکب و قوس ...
... عمود باشد به ... و قوس ... عمود
به ... و قوس ... عمود باشد به قوس ... پس
جمیع این قوسها اگر ربع دایرهٔ اعظم کنند فلک البروج آنها را قوسهای
تعیین کوکب ... می‌نامند از برای افق و از برای خط استوا و از برای
مدار آفتاب باین طریق که قوس ... مساویست بفاصلهٔ
سمتیت از کوکب که سمتیت عبارتست از فوق الرأس
و ... مساویست ارتفاع کوکب و ... مساویست
بعرض کوکب و ... مساویست طول کوکب و ... مساویست
بفاصلهٔ مابین خط استوا و کوکب که آن قوس را بزبان فرانسه
دکلیناسیون می‌نامند و قوس ... مساویست بفاصلهٔ
مابین نقطهٔ شب و روز بهاری با نقطهٔ تقاطع قوس ... با خط

النهار

شکل ۱۰۱



استوای واو را بزبان فرانسه رکت آسانسیون می‌نامند اگر از نصف النهار
ملاحظه کننده ... بشمارند قوس ... یا زاویهٔ ...
زاویه ایست که اگر ... آفتاب باشد آن زاویه ساعات را در روز
تعیین می‌نماید و این زاویه را در زبان فرانسه زاویهٔ [illegible] می‌نامند
(۱۲) (شکل ۱۰۱) در وقت متوسط و وقت حقیقی ادارهٔ
زمین بدور آفتاب در دایرهٔ مدار آفتاب در روی یک دایره نیست بلکه
این اداره در روی بیضی است پس که تفاوت مابین مرکز بیضی ان
که ... و ... باشد زیاد نیست و در این جا مقر آفتاب در نقطه
... است و کرهٔ ارض در خط ... بدور او حرکت میکند
باین واسطه و بواسطهٔ تمایل مدار آفتاب بخط استوا حرکت
آفتاب در مدت همهٔ ایام سال یک نهج نیست گاهی بسرعت
حرکت میکند و گاهی بطور بطء ... است که ساعتها را

قرار

اگر از حرکت آفتاب بخواهند درست نمایند لابد خراب و ضایع خواهند شد
با وجود این میخواهیم بدانیم که از برای تعیین اوقات از روی حرکت آفتاب
چه قسم باید عمل نمود علت اینکه جز آفتاب کوکب دیگر از برای
ما نیست تا از روی حرکت آن تعیین اوقات خود را نمائیم فرض میکنیم
که یک آفتاب متوسط دیگر در سطح مدار آفتاب دور یک دایره دوران
نماید پس حرکت این آفتاب بانیم واسطه بقاعده خواهد بود و مکان
روز به روز او را میتوان پیدا نمود از ضرب کردن ۳۶۰/۳۶۵ درجه
با مقدار روزهائیکه در این سال داشته ایم بعد یک آفتاب متوسط
دیگر خیال میکنیم که با آفتاب اول در یکدایره بقاعده دوره دوران
نماید و آن دایره در سطح خط استوا باشد طول آفتاب متوسط اول
رکتاسانسیون آفتاب متوسط ثانی میشود و با این واسطه مکان
آفتاب ثانی را در خط استوا میتوان معین نمود و بواسطه حرکت

این آفتاب

این آفتاب میتوانیم وقت و ساعات خود را درست نمائیم از تفاوت
ما بین رکتاسانسیون نهار آفتاب حقیقی با آفتاب متوسط ثانی در نزدیک
خط استوا تفاوت ما بین وقت حقیقی و وقت متوسط از برای
هر روز حاصل میشود مثلاً از برای رکتاسانسیون آفتاب
حقیقی بواسطه طول آفتاب متوسط اول این میشود ۱۰۹ ۶۳
یا آنکه ۳۲ ۱۸ ۷ ساعت و رکتاسانسیون آفتاب متوسط
این شد ۳۹۵ ۱۰۱ یا آنکه ۳۵ ۱۳ ۷ ساعت تفاوت
ما بین اینها این است ۵۷ ۴ و این تفاوت ما بین وقت
حقیقی و وقت متوسط است از برای این روز این تفاوتها را
در یک جدولی که از آن وقت مینامند نوشته اند سال دیگر
روز برا که میخواهند بوقت حقیقی آفتاب از همان روز با علامت خود آن
علاوه مینمایند و حاصل وقت متوسط آن روز میشود

هر روزی از سال را که بخواهیم وقت متوسط آنرا بدانیم در این لوح آن روز را
یافته و آنچه در محاذی او نوشته شده است با علامت خودش با وقت
حقیقی جمع میکنیم مثلاً روز اول ژانویه Janvier در اول ظهر
وقت حقیقی میباید از ظهر وقت متوسط ۴۸″ ۳′ گذشته باشد
و همچنین در روز اول می Mai ظهر وقت متوسط ۶″ ۳′
قبل از ظهر وقت حقیقی خواهد بود

(۱۳) (شکل ۱۰۲) در ساعت آفتاب که از برای افق آن
کادران تورنز میگویند

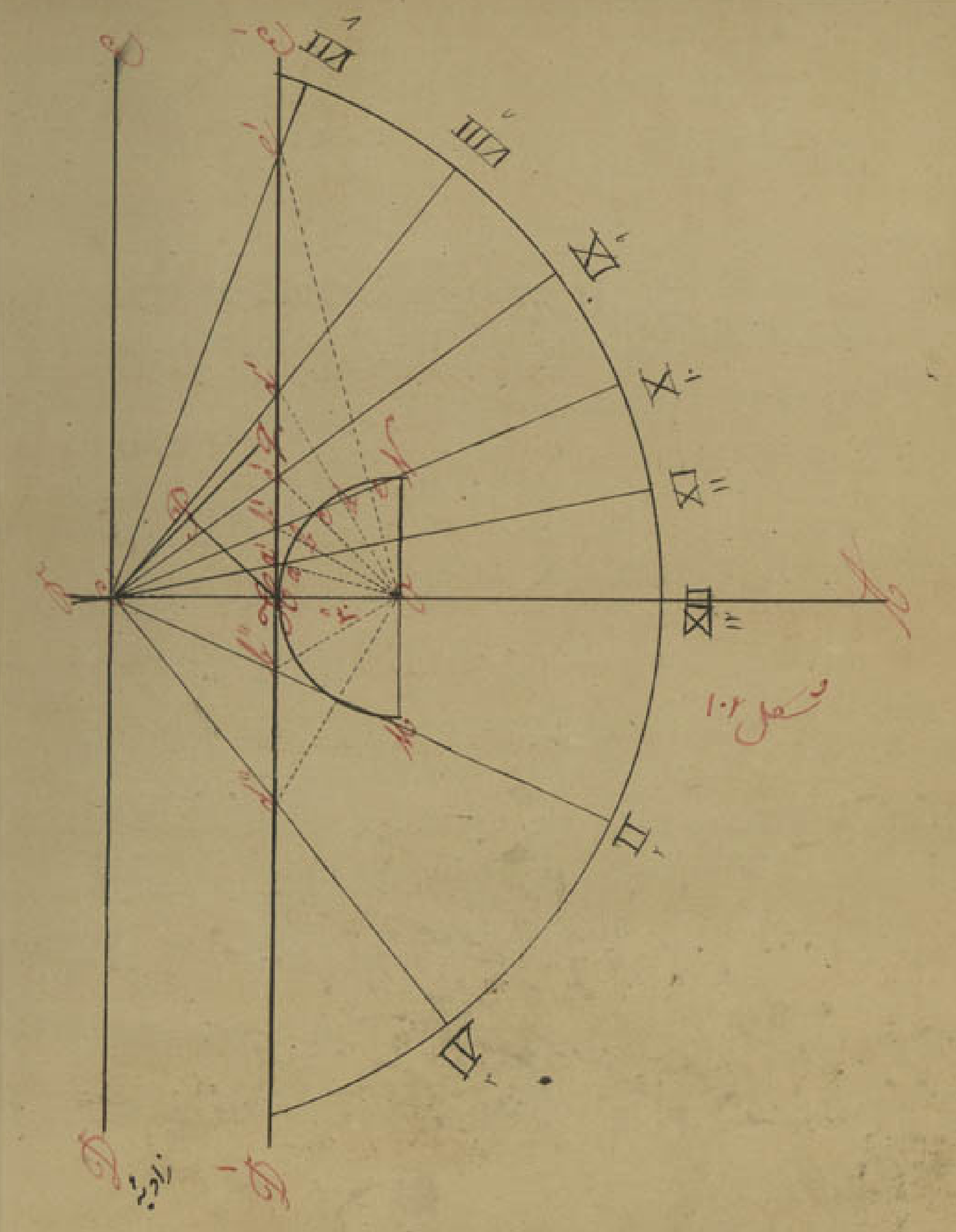
در روی یک لوح عرضی مثلاً ABCD دو خط مستقیم مینمایند
مثل AB و CD که با یکدیگر در یک نقطه مثل نقطه C
بطور عمود تقاطع کنند در نقطه C یک سیخ آهنی مستقیم نازک را
نصب میگذارند که با خطین CD و CA از هر دو طرف

Janvier	١	٣٫٨
	٦	٦٫١
	١١	٨٫٢
	١٦	١٠٫٠
	٢١	١١٫٦
	٣١	١٣٫٧
Fevrier	٥	١٤٫٣
	١٠	١٤٫٦
	١٥	١٤٫٥
	٢٠	١٤٫٠
	٢٥	١٣٫٤
Mars	٢	١٢٫٤
Mars	٧	١١٫٣
	١٢	١٠٫٠
	١٧	٨٫٦
یک روز بعد از عید است	٢٢	٧٫١
	٢٧	٥٫٦
	١	٤٫٠
Avril	٦	٢٫٥
	١١	١٫١
	١٦	−٠٫٢
	٢١	−١٫٣
	٢٦	−٢٫٣
Mai	١	−٣٫١
Mai	٦	−٣٫٦
	١١	−٣٫٩
	١٦	−٣٫٩
	٢١	−٣٫٨
	٢٦	−٣٫٤
	٣١	−٢٫٨
Juin	٥	−٢٫٠
	١٠	−١٫١
	١٥	٠٫٠
اول تابستان	٢٠	١٫٠
	٢٥	٢٫١
	٣٠	٣٫١

Juilet	٥	٤٫١
	١٠	٤٫٩
	١٥	٥٫٥
	٢٠	٥٫٩
	٢٥	٦٫١
	٣٠	٦٫١
Août	٤	٥٫٨
	٩	٥٫٢
	١٤	٤٫٥
	١٩	٣٫٤
	٢٤	٢٫٢
	٢٩	٠٫٨
Septembre	٣	−٠٫٧
	٨	−٢٫٣
	١٣	−٤٫٠
	١٨	−٥٫٨
	٢٣	−٧٫٦
اول پائیز	٢٨	−٩٫٣
Octobre	٣	−١٠٫٩
	٨	−١٢٫٦
	١٣	−١٣٫٣
	١٨	−١٤٫٧
	٢٣	−١٥٫٥
	٢٨	−١٦٫١
Novembre	٢	−١٦٫٢
	٧	−١٦٫٢
	١٢	−١٥٫٧
	١٧	−١٤٫٩
	٢٢	−١٣٫٧
	٢٧	−١٢٫٢
Dezembre	٢	−١٠٫٤
	٧	−٨٫٤
	١٢	−٦٫١
	١٧	−٣٫٧
اول زمستان	٢٢	−١٫٢
	٢٧	١٫٢
	٣١	٣٫٧

ماوانی

زاویهٔ قائمه احداث نماید ولاکن با خط ح ب یک زاویه احداث
کند که متعلق باشد بارتفاع قطب یا بدرجهٔ عرض مکانی که در آنجا
ساعت آفتاب ساخته میشود مثلاً از برای طهران تقریباً ۳۵
درجه حاصل میشود اگر لوح را تقریباً بگذارند که خط ح ب بسمت
شمال باشد پس ط ح بجانب مشرق و ح م بسمت
مغرب و ح ب بسمت جنوب میافتد و آن سیخچه بتحقیق با محور
زمین متوازی میشود از برای تعیین خطوط XI ح و X ح
و IX ح وغیر آنها که ساعات را مشخص مینمایند قانون
عمل باینقسم است که در سطح لوح خط ب ح را مشخص مینمایند
که با خط ح ب زاویهٔ ب ح ب حاصل میکند که مساوی باشد
بارتفاع قطب مکان و در یک نقطهٔ مطلق در خط ب ح مثلاً
نقطهٔ د یک عمود د ح در بالای ب ح احداث مینمایند



شکل ۱۰۲

در نقطهٔ ch خط ab را موازی cd احداث
میکنند و ch را مساوی chp میگیرند و از نقطهٔ c
شل رکز با هر نصف قطر یکه بخواهند مثلاً با نصف قطر ch
نصف دایرهٔ ... را احداث مینمایند و بعد
محیط این نصف دایره را از هر طرف از نقطهٔ ch به شش قسمت
متساوی تقسیم مینمایند ۲ از نقطهای ... و ... و ... به نقطهٔ c
که پرچه در آنجا قرار گذاشته شده است خط وارد آورند خطوط
XI ... و X ... و IX ... و VII ...
وغیرهم حاصل میشوند و از اینها ساعات پیش از ظهر معلوم میکنند
و ساعات بعد از ظهر از روی همین قاعده از طرف دیگر نصف
دایره میشود اگر نصف دایره را بجای اینکه بدوازده قسمت متساویه
تقسیم نمایند به ۲۴ یا به ۴۸ قسمت تقسیم بکنند نصف ساعات
و ربع

۲ از نقطهای ... و ... و ... وغیرهم خطوط ... و ... و ... وغیرهم را میکشند اگر

و ربع ساعات نیز معلوم میشود و بچه ساعات آفتابی را ساعت
آفتاب باشی مینامند

قاعدهٔ علمی این قانون عمل

در اینجا حاصل میشود که تانژانت زاویهٔ ... با زاویهٔ
... و همچنین زوایایی که از خطوط ... و ... وغیرهم
با خط ... که خط نصف النهار است ترکیب میابند
تا تانژانت ساعات که تحویل بدرجه شده اند ضرب سینوس
ارتفاع قطب مثلاً اگر بخواهند زاویهٔ ... یا زاویهٔ ...
از برای زاویهٔ ساعت از ۳۰ یا درجه ساعت قبل یا بعد از ظهر را
از برای یک مکانیکه ارتفاع قطب در آنجا ۵۰ درجه باشد پیدا
نمایند این حاصل میشود tange ۳۰ × sinus ۵۰ =
= ٫۵۷۷۳۵ × ٫۷۶۶۰۴ = ٫۴۴۲۲۷ =
= tange [illegible] = tange [illegible]

چنین تمام A'' = تمام A' این حاصل میشود ۳۱° ۵۱' ۲۳''

و بهمین طریق از برای ساعات زاویه ساعت از برای ۳۰° یا

از برای دو ساعت باین معنی که زاویه تمام ح H یا زاویه ح H

تمام ح نامعلوم باشد و آن نامعلوم بعد باشد از تقاطع قطب یا زاویه

P ح H مساوی باشد ۵۰° از برای مثلث‌های قائم الزاویه

$H P$ ح و تمام ح H ح این اربعه متناسبه حاصل میشود

$\sin 50° : 1 = HP : CH$ و $CH =$

$\frac{HP}{\sin 50°}$ = و در مثلث قائم الزاویه ح Hb ح

این حاصل است $Hb'' = Ho \tan 30°$

و در مثلث قائم الزاویه ح H ح این حاصل است

$\tan x = \frac{Hb''}{CH}$ پس $Hb'' = CH \tan x$

$= \frac{Hb''}{CH} = \frac{Ho \tan 30°}{\frac{HP}{\sin 50°}} = Ho \tan 30° \times \frac{\sin 50°}{HP} =$

$\sin 50°$

$\sin 50° \times \tan 30°$ بعلت اینکه $HP = Ho$ است

پس میباید وقت حقیقی آفتاب را از روی ساعت آفتابی از برای روز آخر

معلوم نمود با و الحاق کردن تعدیل آنروز را با علامتیکه دارد تا وقت وسطی حاصل گردد

باب پنجم

فصل اول در هندسه عملی یا علم سطح گیری

هندسه عملی یا علم سطح گیری عبارت است از پیمودن فاصله‌های بین دو نقطه طبیعی داده شده و فاصله‌های مابین چند چیز و از پیدا کردن وضع و طول چند خط و از حاصل کردن یک شکلیکه شباهت داشته باشد بواسطه چند رابطه با سطح یک قطعه زمین و همچنین درست معین کردن سطح مربع یک زمین است بالتفصیل همه اجزای آن پس تمامیه این علم نیست جز محاسبات و فورمولهائیکه سابقا بیان شده‌اند و بواسطه او آموخته میشود حل آنها که دخل با و دارد و باعث

بعض آلات و اسبابیکه مخصوص این ساخته شده اند پس از ادراک درست
فهمیدن و آموختن علم سطح کره دانستن مسائل یا نژ و حل مسائل آنها
بواسطهٔ قواعد مختلفه به تنهائی کفایت نمیکند بلکه میباید جمیع آلات
و اسبابیکه مخصوص این علم ساخته شده اند همه را با قاعدهٔ عمل و
و بکار بردن آنها دانسته و شناخته تا در همهٔ مقامات و حالات
با تجربهٔ کامل بتوان با آنها عمل نمود وصف و تعریف این آلات هر قدر
بتفصیل و درست بیان شود جز یک خیال ناقص حاصل دیگر نخواهد داشت
بعلت اینکه لابد باید که آنها همیشه در پیش چشم باشند تا خواص و عمل
هر یک مخصوصه دانسته و فهمیده شود در این باب اقتضا یافته که اهم
و الزم این فقره علم ساحت اند کشکول نمائیم و در آن ضمن طریقه
طریقهٔ بکار بردن اسبابهائیکه مختصر تر و آسان تر بین جمیع اسبابهائی
دیگر مخصوص این علم اند نیز بیان میشود مثال اول در ساختن
یک مقیاسی

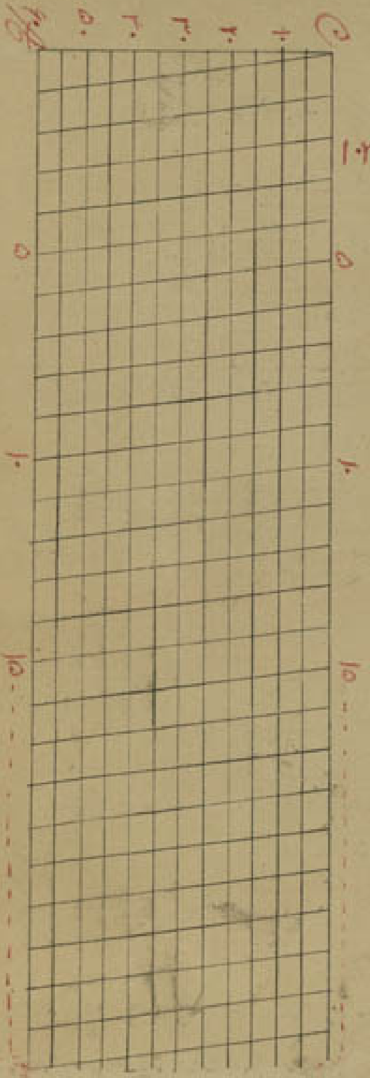
یک مقیاس زاویه که از زبان فرانسه راپورتور میگویند
rapporteur تا بتوان بواسطهٔ آن اندازهٔ یک
زاویه را در روی کاغذ معین نمود از برای ساختن این از روی
یک لوح مثلثاتی عدد طبیعی از این درجات را

½، ۱، ۱½، ۲، ۲½، ۳، ‑‑‑‑‑‑ ۴۴½، ۴۵

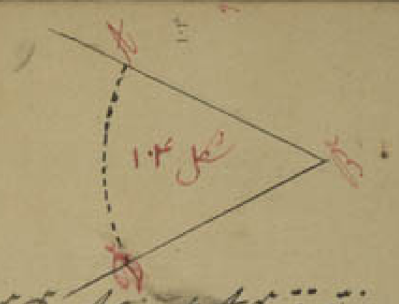
گرفته و هر یک از این عددها را بعدد ۲ ضرب نمایند و حاصل ضرب و در نمی

۱ (۱) ۲ ۳ ۴ ‑‑‑‑‑‑‑‑ ۸۹ ۹۰

قوسهائی میشوند و ام وترها در دایرهٔ فرض شده اند که نصف قطر
آن یکواحد باشد و لوح مذکور شامل است بوترهای
جمیع قوسهای یکدایره که نصف قطر آن واحد است
تا نود درجه



شکل ۱۰۳



در روی خط مستقیم ... عمودی ... و ... را
اخراج مینمایند وعمود ... را بدوازده قسمت مساوی تقسیم
میکنند واز آن قسمتها خطوط متوازیه با خط ... میکشند
در روی خط ... و ... طول ... یکدیگر جدا شود و ... را
که از هر یک خط مذکور که گذشته اند میکشند واز هر یک از آنها خطوط ...
ورشال میکشند چنانچه در شکل دیده میشود باچنین مقیاس زاویه
که اینور تور باشد میتوان اندازه زاویه ... را اگر خواهند بطریق
که از نقطه ... فیمابین ضلعین زاویه بانصف قطر ... که مساوی ... است
... قوس ... را احداث میکنند و تر ... را با پرکار
اندازه میگیرند برای آنکه بدانند در روی مقیاس زاویه چند درجه و چند
دقیقه از برای او حاصل میشود مثلاً وقتیکه یک نقطه پرگار در روی
خط ... در نقطه ۰ ع واقع شود و نقطه دیگر آن در روی ...

درجه	وتر	درجه	وتر	درجه	وتر	درجه	وتر	درجه	وتر
۱	٫٠١٧٥	۱۹	٫٣٣٠١	۳۷	٫٦٣٤٦	۵۵	٫٩٢٣٥	۷۳	١٫١٨٩٦
۲	٫٠٣٤٩	۲۰	٫٣٤٧٣	۳۸	٫٦٥١١	۵۶	٫٩٣٨٩	۷۴	١٫٢٠٣٦
۳	٫٠٥٢٤	۲۱	٫٣٦٤٥	۳۹	٫٦٦٧٦	۵۷	٫٩٥٤٣	۷۵	١٫٢١٧٥
۴	٫٠٦٩٨	۲۲	٫٣٨١٦	۴۰	٫٦٨٤٠	۵۸	٫٩٦٩٦	۷۶	١٫٢٣١٣
۵	٫٠٨٧٢	۲۳	٫٣٩٨٧	۴۱	٫٧٠٠٤	۵۹	٫٩٨٤٨	۷۷	١٫٢٤٥٠
۶	٫١٠٤٧	۲۴	٫٤١٥٨	۴۲	٫٧١٦٧	۶۰	١٫٠٠٠٠	۷۸	١٫٢٥٨٦
۷	٫١٢٢١	۲۵	٫٤٣٢٩	۴۳	٫٧٣٣٠	۶۱	١٫٠١٥١	۷۹	١٫٢٧٢٢
۸	٫١٣٩٥	۲۶	٫٤٤٩٩	۴۴	٫٧٤٩٢	۶۲	١٫٠٣٠١	۸۰	١٫٢٨٥٦
۹	٫١٥٦٩	۲۷	٫٤٦٦٩	۴۵	٫٧٦٥٤	۶۳	١٫٠٣٥٠	۸۱	١٫٢٩٨٩
۱۰	٫١٧٤٣	۲۸	٫٤٨٣٨	۴۶	٫٧٨١٥	۶۴	١٫٠٥٩٨	۸۲	١٫٣١٢١
۱۱	٫١٩١٧	۲۹	٫٥٠٠٨	۴۷	٫٧٩٧٥	۶۵	١٫٠٧٤٦	۸۳	١٫٣٢٥٢
۱۲	٫٢٠٩١	۳۰	٫٥١٧٦	۴۸	٫٨١٣٥	۶۶	١٫٠٨٩٣	۸۴	١٫٣٣٨٣
۱۳	٫٢٢٦٤	۳۱	٫٥٣٤٥	۴۹	٫٨٢٩٤	۶۷	١٫١٠٣٩	۸۵	١٫٣٥١٢
۱۴	٫٢٤٣٧	۳۲	٫٥٥١٣	۵۰	٫٨٤٥٢	۶۸	١٫١١٨٤	۸۶	١٫٣٦٤٠
۱۵	٫٢٦١١	۳۳	٫٥٦٨٠	۵۱	٫٨٦١٠	۶۹	١٫١٣٢٨	۸۷	١٫٣٧٦٧
۱۶	٫٢٧٨٣	۳۴	٫٥٨٤٧	۵۲	٫٨٧٦٧	۷۰	١٫١٤٧٢	۸۸	١٫٣٨٩٣
۱۷	٫٢٩٥٦	۳۵	٫٦٠١٤	۵۳	٫٨٩٢٤	۷۱	١٫١٦١٤	۸۹	١٫٤٠١٨
۱۸	٫٣١٢٩	۳۶	٫٦١٨٠	۵۴	٫٩٠٨٠	۷۲	١٫١٧٥٦	۹۰	١٫٤١٤٢

و در مثال ۲ که در روی خط [illegible] است باشد زاویهٔ [illegible]

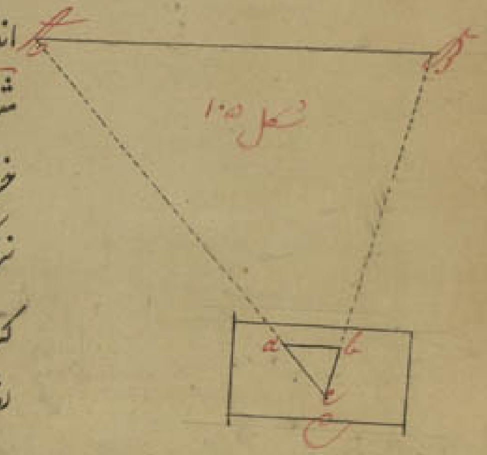
۲۰۰ ۲۵ میشود یعنی زاویهٔ منفرجه را اگر بخواهند اندازه بگیرند اوّل

اندازهٔ متمم تا ۱۸۰ او را مشخص نموده از ۱۸۰ در جهت تفریق مینمایند

حاصل تفریق اندازهٔ آن زاویهٔ منفرجه خواهد بود از برای اندازه گرفتن

سطحی که مثل زوایای مختلفه در روی زمین میتوان با مقیاس زاویه

اندازه گرفت لیکن در اینجا بجای پرگار با ریسمان عمل نمایند



مثال سیم شکل ۱۰۵ میخواهند در روی زمین اندازهٔ خطوط اصل

خط [illegible] بگیرند که جزا در اشتهار آن با جزای دیگر اسقف میتوان

نزدیک شد طریقهٔ اوّل بواسطهٔ تخته و سه پایه یا سایر لوازمات آن

که معروف اند یکی از آنها را مثل مکان [illegible] اختیار میکنند که از آنجا

نقطهٔ [illegible] پیدا باشند و تخته را در بالای نقطهٔ [illegible] بطوری که

واسید ازند و در روی کاغذ یکه به تخته چسبانده اند در روی نقطه که متعلق

به نقطهٔ

به نقطهٔ [illegible] سنجاق نصب میکنند که فرضاً نقطهٔ [illegible] باشد و بعد با ستارهٔ

دوربین دار از نقطهٔ [illegible] به نقطتین [illegible] و [illegible] قراول رفته خطوط [illegible]

و [illegible] را میکشند و بعد از روی یک مقیاس تحویلی آنها را مساوی

روی

میکشند به [illegible] و [illegible] و پس از آن طول خط [illegible] را از

مقیاس میگیرند و باید بواسطهٔ اندازهٔ خط [illegible] معلوم میشود

طریقهٔ ثانی بواسطهٔ مقیاس زاویه اندازهٔ زاویهٔ [illegible] را

میگیرند و همچنین اندازهٔ ضلعین او را نیز که [illegible] و [illegible] باشند

مشخص میکنند و در مثلث [illegible] از معلوم بودن ضلع دیگر و زاویهٔ

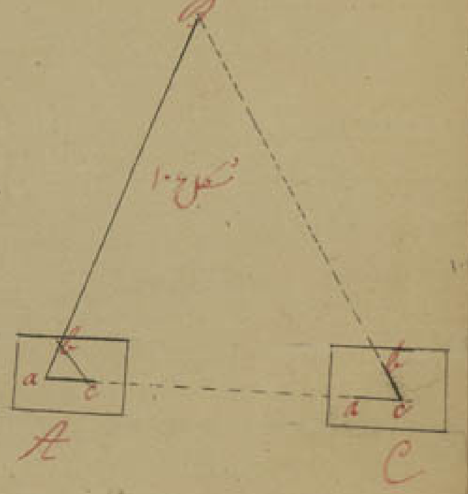
بینهما ضلع سیم را معلوم نمود میتوان طریق ثالث بطور ترسیم زاویهٔ

بینهما شدهٔ [illegible] را در روی کاغذ رسم مینمایند و از روی

مقیاس تحویلی ضلعین آنرا نیز معین میکنند که [illegible] و [illegible]

میباشند و با [illegible] و [illegible] بیک نسبت اند پس خطی که

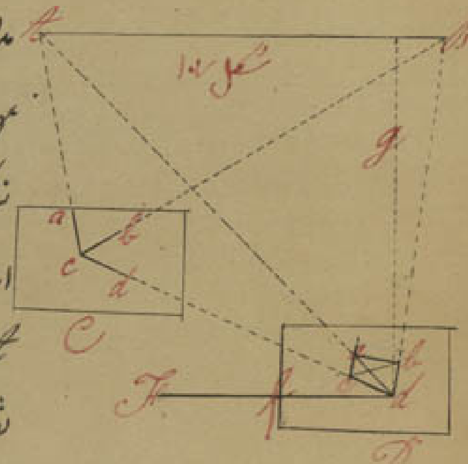
و ... نیز بهمان نسبت اند باید معلوم کرد که هر قدر از اندازهٔ مقیاس را
خط ... شامل میشود همان قدر پا یا ذرع یا اندازهٔ دیگر که در مقیاس
فرض شده است اندازهٔ خط ... میشود مثال سیم
شکل ۱۰۶ میخواهند خط ... را بپیمایند لیکن در جائی که نتوان
باو نزدیک شد مگر از یک انتهای آن قاعدهٔ اول که بواسطهٔ تخته
و سه پایه و ... میخواهند بپیمایند یک مکانی را معین مینمایند مثل
مکان ج که از آنجا بتوانند نقطتین ... و ... را احساس
نمایند و بتوانند از آنجا اندازهٔ خط ... را معلوم نمایند بعد
تخته را در بالای نقطهٔ ج وا میدارند پس از آن از نقطهٔ ج که در روی
تخته و در بالای ج واقع است بنقطتین ... و ... قراول
میروند و از روی مقیاس اندازهٔ ... را مساوی اندازهٔ ...
مینمایند و پس از آن تخته را در بالای ... نقطه وا میدارند که در سمت



محاذی نقطه

محاذی نقطهٔ ... که در روی تخته است واقع شود و همچنین خط ...
در محاذی خط ... باشد و پس از آن از نقطهٔ ... بنقطهٔ ... قراول
میروند خط قراول ... در نقطهٔ ... با خط قراول ... تقاطع میکنند
و خط ... از روی اندازهٔ مقیاس مساوی میشود بخط ...
قاعدهٔ ... بواسطهٔ مقیاس زاویه قاعدهٔ مثلث مفروض را
که ... باشد میپیمایند و زاویتین ... و ... را که از دو انتهای
آن احداث میشوند معلوم مینمایند باید بواسطهٔ زاویهٔ سیم که ...
باشد معلوم شده ضلع ... نیز مشخص میشود قاعدهٔ سیم موافق
ترسیم خط ... را کشیده موافق اندازهٔ مقیاس مساوی میکنند
به ... و در دو انتهای آن زاویهٔ ... و ... را احداث مینمایند
که اولی مساوی باشد به ... و ثانی مساوی باشد بزاویهٔ ...
... پس از آن خط ... را میکشند که موافق اندازهٔ مقیاس مساوی

مثلی بخط [illegible] مثال چهارم (شکل ۱۰۱) میخواهند خط
[illegible] را بپیمایند ولی از هیچ یک از انتهای آن با آن خط نمیتوان
نزدیک شد اولاً با تخته و شاه پایه قاعده D C را میگیرند لیکن
این قاعده میباید بقسمی واقع باشد که از نقطهٔ C بتوان نقاط
[illegible] و D را مشاهده نمود و همچنین از نقطهٔ D بتوان
نقاط C و [illegible] را ملاحظه نمود پس از آن تخته را در بالای نقطهٔ
C وا میدارند و از آنجا به نقاط [illegible] و D قراول رفته موافق
اندازهٔ مقیاس خط [illegible] را مساوی مینمایند بخط D C و بعد
تخته را در بالای نقطهٔ D وا میدارند بقسمیکه درست محاذی نقطهٔ
d که در روی تخته است واقع شود بقسمیکه خط D C در امتداد
C D باشد و از نقطهٔ d بنقطتین [illegible] قراول میروند و خطین
نظر [illegible] با خطین ca و [illegible] در نقطتین [illegible]



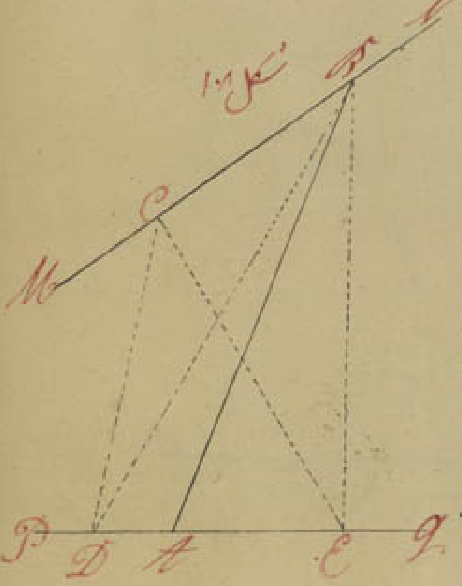
تقاطع

تقاطع مینمایند و از خط [illegible] اندازهٔ خط [illegible] معلوم میشود ثانیاً
بواسطهٔ مقیاس زاویه قاعدهٔ D C را اندازه میگیرند و زوایای
D C [illegible] و D C [illegible] و C D [illegible] را ملاحظه
مینمایند بعد معلوم میشود که در مثلث D C [illegible] ضلع D C با زاویتین
D C [illegible] و C D [illegible] معلوم است و میتوان ضلع [illegible] را
معین نمود و باین قسم میتوان پیدا کرد که در مثلث [illegible] D C بواسطهٔ
ضلع D C و زوایای D C [illegible] و C D [illegible] که اندازهٔ ضلع
D [illegible] معلوم میشود پس از اعمال واضح میشود که در مثلث [illegible] D [illegible]
ضلعین [illegible] و D [illegible] با زاویهٔ واقعهٔ بینهما که زاویهٔ [illegible] D [illegible]
باشد معلوم است و میتوان ضلع سیم را که [illegible] میباشد دریاب
پیدا نمود ثالثاً بقاعدهٔ ترسیم خط [illegible] را ترسیم مینمائیم و از اندازهٔ
مقیاس مساوی مینمایند [illegible] D C و در انتهای آن زوایای مفصله را

معین میکنند که عبارت از زوایای acd و bcd و adc و
و bdc که بترتیب بزوایای DCE و ECD و CDA و DCB
و ... CD مساوی‌اند و از اندازهٔ مقیاس معلوم میشود که خط ab
مساویست بخط AB مثال پنجم میخواهند در روی زمین بخط AB
که نمیتوان باو نزدیک شد بخطی متوازی بکشند که از نقطهٔ D بگذرد
اولاً با تخته و گُنیا یه موافق قاعدهٔ اول که در مثال قبل بیان شد
معمول میدارند پس از آن در روی تخته خط lm را موازی ab میکنند
و همان خط را نقل میکنند بروی زمین مثل خط DE و این
خط بلاشبهه موازی میشود بخط AB ثانیاً بواسطهٔ مقیاس زاویهٔ
پس از معمول داشتن قاعدهٔ دویم و سیم مثال قبل زاویهٔ DAB را
مشخص مینمایند و در روی زمین در نقطهٔ D زاویهٔ EDA را
احداث میکنند که مساوی باشد به DAB خط DE باین واسطه

موازی خط

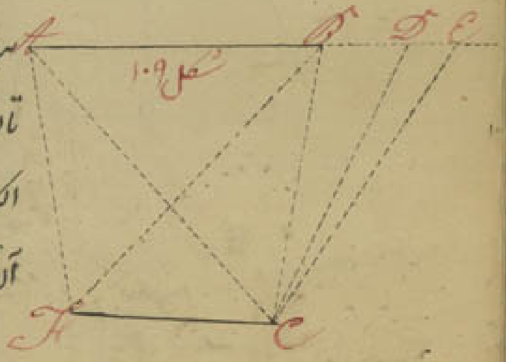
موازی خط AB میشود مثال ششم از یک نقطهٔ در روی زمین مثل
نقطهٔ D میخواهند عمودی بر خط AB وارد آورند در حالتیکه بآن خط
از هیچ طرف نمیتوان نزدیک شد موافق قاعدهٔ معموله در مثال قبل
از نقطهٔ D خط DE را میکشند که موازی است بخط AB
و از نقطهٔ D یا بواسطهٔ گُنیا یا بواسطهٔ مقیاس زاویه عمودی بخط DE
وارد می‌آورند و این خط عمود بخط AB نیز عمود میشود اگر
این خط عمود را باین قسم نیز میتوان نمود که در روی زمین در نقطهٔ D
و با خط DE زاویهٔ EDB را احداث مینمایند که با زاویهٔ
معلوم شدهٔ DAB مساوی باشند به نود درجه مثال هفتم



(شکل ۱۰۸) اگر بعید باشد نقطهٔ p یک خطیکه نتوان باو نزدیک
شد و ... یک خطیکه نتوان باو نزدیک شد میخواهند در ...
یک نقطهٔ مثل نقطهٔ ... پیدا نمایند بقسمیکه خط ... که از نقطهٔ

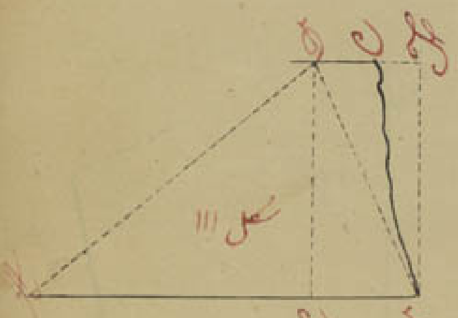
که واقع است

به نقطهٔ […] در روی خط […] با خط […] یک زاویه احداث
نمایند که مساوی باشد بزاویهٔ داده شده شکل زاویهٔ […]
در خط […] یک علامت محسوسه پیدا نمایند شکل نقطهٔ […]
و در روی خط […] یک قاعدهٔ شکل […] اندازه میگیرند و
موافق قواعد معموله در اشکال مذکورهٔ فوق خط […] و زاویهٔ
[…] را مشخص مینمایند و بایزواسطه زاویهٔ […]
و در مثلث […] ضلع […] با زوایای […] و
[…] معلوم میباشند و بایزواسطه خط […] را میتوان
پیدا نمود که طولش را از نقطهٔ […] تا نقطهٔ […] میتوان گذاشت



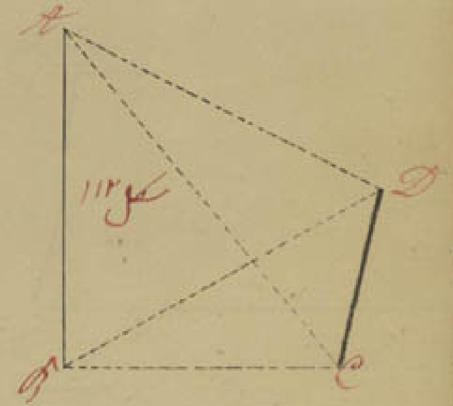
تا نقطهٔ […] و خط […] مشخص شود مثال هشتم (شکل ۱۰۹)
اگر در روی زمین بواسطهٔ موانع طبیعی یا غیر طبیعی خط […] و امتداد
آن محسوس نباشند بخواهند در روی زمین و نقطهٔ شکل […] پیدا

نمایند





نمایند که در امتداد آن خط واقع شده باشند باید طریق عمل مینمایند تا یک
قاعدهٔ شکل خط […] و خط […] و زاویهٔ […] را مشخص
و بایزواسطه زاویهٔ […] نیز معلوم میشود پس از آن در نقطهٔ […]
با خط […] یکزاویهٔ مطلق شکل زاویهٔ […] احداث میکنند
در مثلث […] ضلع […] با زاویتین […]
و […] معلوم شدند پس بایزواسطه ضلع […] را نیز میتوان
مشخص نمود تا اینکه نقطهٔ […] در امتداد خط […] حاصل شود
و با همین طریق نقطهٔ […] را نیز در همان امتداد معین مینمایند مثال
نهم (شکل ۱۱۰ و ۱۱۱) در پیمودن ارتفاع یک بلندی که نتوان
باو نزدیک شد شکل بلندی […] طول افقی یکقاعده را مشخص
مینمایند که در شکل ۱۱۱ […] مساوی […] باشد و در شکل
۱۱۰ […] مساوی […] باشد بواسطهٔ یکمقیاس زاویه که در روی



که در روی یک سطح نصب شده مثل چوب [illegible] که در نقطهٔ [illegible] قرار
گذاشته باشند زاویهٔ ارتفاع و عمق را که [illegible] و [illegible]
باشند مشخص مینمایند بمثلث قائم الزاویهٔ [illegible] ضلع
[illegible] بازاویهٔ [illegible] معلوم هستند و ضلع [illegible] را حساب
بقاعدهٔ ترسیم میتوان پیدا کرد و در مثلث قائم الزاویهٔ [illegible]
ضلع [illegible] بازاویهٔ [illegible] معلوم هستند و باین واسطه ضلع
[illegible] را نیز میتوان گرفت که در شکل ۱۱۱ بخط [illegible] اضافه
نموده و در شکل ۱۱۰ از خط [illegible] کم مینمایند حاصل جمع یا تفریق
ارتفاع بلندی [illegible] خواهد بود مثال دهم (شکل ۱۱۲)
در بعضی اوقات ارتفاع یک بلندی که نتوان باو نزدیک شد مثل [illegible]
فاصلهٔ [illegible] را اندازه گرفته در انتهای آن زاویتین [illegible]
[illegible] و [illegible] را نیز مشخص مینمایند و از شناختن

این ها ...

این ها حساب بقاعدهٔ ترسیم ضلع [illegible] را نیز معلوم میکنند
و همچنین زاویهٔ ارتفاع را که [illegible] باشد مشخص نموده در مثلث
قائم الزاویهٔ [illegible] ارتفاع [illegible] را میتوان معلوم کرد
مثال یازدهم (شکل ۱۱۳) اگر شکل [illegible]
در روی زمین باشد و بخواهند در روی کاغذ شبیه آن شکل را بکشند باید تخته
که آن شکل را بکاغذ نقل نموده سطح آنرا موافق اندازهٔ مقیاس
نمایند باین طریق عمل میکنند قاعدهٔ [illegible] بهموار تخته را در بالای
نقطهٔ [illegible] قرار میگذارند و از نقطهٔ [illegible] که در روی تخته در سمت محاذی
[illegible] واقع است نقاط [illegible] و [illegible] و [illegible] و [illegible]
و [illegible] را قراول رفته از روی اندازهٔ مقیاس خط [illegible] را کشیده
مساوی [illegible] میکنند پس از آن تخته را در روی نقطهٔ [illegible] نقل
کنند نقطهٔ [illegible] را درست در بالای [illegible] قرار میگذارند بقسمیکه

خط ... در امتداد خط ... باشد در این مقام از نقطه ... که
که در روی تخته احداث شده است به نقاط c و ... و ... قرار اول ببینند
خطوط نظری ... و ... و ... با خطوط با خطوط نظری ae و
... و ... در نقاط c ... و ... تقاطع میکنند و باین واسطه
نقاط ... و ... و ... و ... در روی کاغذ مشخص میشود و در چنین
اشکال ضلعی اگر از برای قاعده منتخب میکنند میباید ملاحظه نمایند که
تقسیم واقع شده باشد که خطوط نظری حادثه از آن زیاد به یکدیگر
تمایل نداشته باشند تا اینکه بتوان نقطه تقاطع آنها را درست تشخیص داد
چونکه در این شکل اگر از قاعده اول منتخب شده به نقاط دیگر نیز قرار اول
برند نقاط تقاطع خطوط نظری تا نقطه ... و ... و ... درست
معلوم نمیشوند لابد میباید تخته را بیک نقطه دیگر نقل نمود مثلا نقطه
c را بر روی نقطه ... قرار گذاشت و از آنجا به نقاط ... و ...

و ...

و ... قرار اول رفت تا خطوط نظری ef و eg و eh
با خطوط نظری ha و ag و ah در نقاط f و g و h
تقاطع نمایند تا شکل abcdefgha که به تحقیق
با شکل ABCDEFGH ...
متشابه میباشند حاصل شود و از برای فهمیدن طول هر یک از اضلاع
این شکل میباید با پرگار طول آنها را گرفت و با مقیاس تخفیف
نمود و از برای تعیین سمت تخته در همهٔ این مقامات میباید قطب نما را
بکار برد و باین قسم که در روی تخته و در هر یک از مقامات بستر که
در مقام اول عقربه آن مستقر بود همیشه بهمان سمت مستقر باشد
باین جهت تخته را اینقدر باید حرکت داد که عقربه قطب نما از شمال
بجنوب مستقر شود و باین واسطه لازم است که سطح تخته درست
مسطح باشد اگر نقاطی که در روی محیط شکل واقعند قابل ...

که از قرار دادن تخته در روی آنها و قراول رفتن به سایر نقاط خطوط
نظر حاصل شده و با یکدیگر تقاطع نمایند میباید در میان شکل یک
نقطه انتخاب شود مثلاً مثل نقطه ک که از آنجا بتوان با همه
خطوط نظر حاصل شده تقاطع شود در اینصورت یکی از نقاط
محیط شکل مثلاً مثل نقطه ه که از آنجا به نقطه ک قراول رفته
در روی کاغذ خط نظر را که حاصل میشود احداث مینمایند و پس از آن
تخته را به نقطه ک که هنوز در روی کاغذ معین نشده است نقل
مینمایند و نصب وا میدارند که خط نظر از ه تا ک درست
در جای امتداد خط ه ک واقع شود و نقطه ها را بجا
و همچنین سایر نقاط که در روی کاغذ مشخص شده اند با نقطه های دیگر
در روی زمین میباشند مثل نقاط ح و د و غیره قدری
استداد باشند مثلاً اگر از روی تخته و نقطه ه به نقطه ح که در روی

ابعاد

زمین است قراول رفته خط نظر ح ک را امتداد بدهند تا خط
ک گ و در نقطه گ تقاطع کند نقطه گ آنوقت در روی کاغذ مشخص
میشود و میتوان تخته را در روی او قرار گذاشته به نقطه های دیگر که لازم است
قراول رفته خطوط نظر را که تا آنوقت با هیچ خط تقاطع نکرده بودند با خطوط
که حاصل میشود تقاطع نمایند پس یک قاعده دیگر نیز شکل بزرگ را میتوان
مساحت کرد باین طور که اگر از یک نقطه محیط شکل به نقطه دیگر آن
که محاذی هم باشند از میان شکل نتوان قراول رفت باین قاعده
عمل مینمایند که اگر با تخته در نقطه ح باشند ضلع ح د را اندازه مینمایند
و در روی کاغذ خط ح ط را کشیده از روی اندازه مقیاس مساوی ح د
مینمایند بعد تخته را در روی نقطه ح گذاشته به نقطه ط قراول میروند
و در روی کاغذ از روی اندازه مقیاس خط ط ح را میکشند و مساوی
ح ط مینمایند و همچنین عمل میکنند تا اینکه شکل به تمامه در روی

کاغذ ترسیم شود و بواسطهٔ این قاعده میتوان محیط یا اضلاع باغات
و جنگلها و راههائی که بخط مستقیم نمیشود و دهات و شهرها و سایر اشکال
از این قبیل را پیموده و مساحت کرد و در پیمودن یک زمین وسیع میباید
فقرات مفصلهٔ ذیل را ملاحظه نمود اوّلاً میباید جمیع مقدّمات
تا ویرا دانسته و جمیع لوازم این فن را مرتب داشت تا بتواند از عهده
برآمد ثانیاً میباید زمین را بچند مثلث بزرگ تقسیم نمود ثالثاً در تحصیل
نقاط با علامات مثل بیرق وغیره و مساحت کردن هر یک از مثلث ها
بتفصیل یعنی با آنچه که در آنها بهم میرسد را ابعاد درست باهم ملصق نمودن
نقشه هائیکه از برای ترسیم آن زمین رسم مینمایند

اوّلاً در ترتیب لوازمات مساحی به تمامیه

(۱) یک مکان باید مشخص کرد که قابل تعیین قاعده باشد
(۲) اگر تخته بقدر کفایت بزرگ و وسیع باشد که بتوان شکل زیر را

که بخواهند

که میخواهند به پیمایند تمام به در روی او رسم نمود باندکی عمل و تجربه در مقام
اوکش وضع مینمایند بقسمیکه جمیع نقاط شکلیکه باید پیموده شود یا آنکه
جمیع تقاطعات خطوط منظوره که در آن شکل حاصل میشوند کلاً در روی کاغذ
واقع شده و از او خارج نشوند
(۳) اگر بخواهند زمین بسیار وسیعی را به پیمایند و از برای آن احتیاج بچند تخته
دیگر باشند میباید قبل از شروع به ترسیم درست فکر نمود که بچه ترتیب
و در چه وضع عمل را میباید بانجام رساند که بعد از اتمام کار بتوان آن
رسم هائیکه در تخته های متعدده حاصل شده اند بیکدیگر وصل نمود
(۴) در نظر اوّل که ملاحظه مینمایند میباید متوجه باشند که علامات
و اشیاء مسطوره که در آن واقعند از نظر مخفی نشوند بعلت اینکه بلا شک
با آنها محتاج خواهند شد و اگر در زمینیکه میخواهند به پیمایند از این علامات
و اشیاء چیزی واقع نباشد میباید در مکانهائیکه قابل این عمل اند

علامت نصب کردن مثلاً در مکانهای مرتفعهٔ آن زمین

(۵) میباید قبل از شروع به پیمودن زمین یا در هنگام پیمودن ملاحظهٔ
وضع زمین را بتفصیل نمود که تا کجای زمین را از یک وضع تخته میتوان پیمود
و همچنین از برای وضع تعدد تخته کدام مکان را باید مشخص نمود تا محل علامت

(۶) و همچنین لازم است که قبل از شروع به پیمودن جمیع موانع از صفحهٔ
زمین را شناخت مثل نهرها و رودخانهها و باتلاقها و غیرهم تا بتوان
در وقت تغییر مقام راهی را که نزدیکتر و سهلتر است مشخص نمود
منظور یکی بجهت آن ترسیم شکل زمینیکه میپیمایند محتاج چند بزرگی
مقیاس را مشخص میکنند و منظور از ترسیم شکل زمین خارج از
فقره نخواهد بود که یکی را منظور صرفه و یکی را منظور نظام میگویند و اغلب
از برای چهار صد تواز طول که هزار قدم باشد از یک پس تا دو پس یک جهت
طول مقیاس معین میکنند

ثانیاً تقسیم

ثانیاً در تقسیم کردن زمینی که باید پیمود بچند مثلث بزرگ
منظور از این نیست جز اینکه بخواهند نقطهای طبیعی یا مصنوعی را که در زمین
بهم میرسد در روی تخته قرار بدهند وقتیکه شروع به پیمودن با تخته مینمایند
میباید قبل از همه چیز باین فکر بیفتند که میباید چند بین مثلث در روی
تخته کشیده شود که ترکیب همهٔ آنها وقتیکه بهم وصل و پهلوی هم شوند
مثل شکل دامهائی میشود که آن را حباله مینامند و حباله در لغت بمعنی
دامی است که از ریسمان برای شکار ماهی و غیره میاندازند و در اینجا
اصطلاح شده است از برای مثلثهائیکه در پیمودن یک زمینی
در ترسیم آن احداث مینمایند و باین واسطه اغلب نقاط اصلیهٔ
زمین را که از دور میتوان تشخیص داد در روی تخته مشخص مینمایند پس از آنکه
همهٔ این مثلثها را حاصل کردند که از برای هر یک از آنها در روی کاغذ
سه نقطه مشخص است و درست شبیهاند بمثلثهائیکه در روی زمین

متعلق بآنهاست آنوقت هر چیزیکه در هر مثلث واقع است به تفصیل
بپیمایند چنانچه در تفصیل ترسیم زمینیکه در روی تخته و قطار رسم باید نمود فهمیده شد
ثالثاً در تعیین نقاط با علامات مثل بیرق وغیره و ساختن کشف هر یک
از مثلثها بتفصیل یعنی با آنچه که در آنها بهم میرسد
پس از آنکه درست مثلثهای زمینی را که میباید شکل او در روی تخته ترسیم شود
مشخص نمودند میباید جمیع اشیائی را که در زمین به تمامه بهم میرسند
در روی کاغذ آشکار و معلوم نمود بقسمیکه بتوان هر یک از آنها را دید و بزرگی
هر یک را بالنسبه فهمید و هر یک را در وضعی که دارد معلوم نمود پس از آنکه تخته را
درست در یک نقطه وضع نمودند آنوقت شروع بکار بردن اشخاصیکه علامت
دارند مینمایند که بزبان فرانسه آنها را فیگوران مینامند و مهندس
با یک اجوان خوبی که همراه خودش چند میخ علامت نوشته شده دارد و بر
میباید ترسیم شود میروند بجائیکه از آنجا جمیع نقطهائیرا که از نقطه که

تخته را در آن قرار گذاشته و آنها را مشخص نموده بود بتوانند دید
در جمیع این نقطها هر جائیکه از برای زمین یک حالتی می‌بینند که قابل نصب
علامت است میخی میکوبند و ترتیب آن میخها موافق ترتیب طبیعی اعلامات
که در آنها نوشته شده اند در جزوکش خواص همه مقامات با اعلامات
وضع آنها میکشد و در هر یک از آنها عموماً میخی که در آنجا کوبیده شده بود نوشته
منظور از پیمودن زمین دارند و بزرگی مقیاس مهندس با آن معلوم
میکند که چند نقطه میباید مشخص نماید و فاصله هر یک از آنها با دیگری
چه قدر باید باشد و تا چه پایه میباید ترسیم زمین را تفصیل داد و پس از اینها
تفاصیل پیمایند زمین پیش تخته آید تا بهر یک از میخها موافق ترتیب
اعدادشان قراول برده و بهر یک قراول میرود اجوان پیدا قرار روی او
نصب نموده بر میگرد و عدد آن میخ را در روی خط قراولی که حاصل شده است
مینویسد از بابت اینکه اجوانی که با بیرق در پهلوی میخ ایستاده

تا مهندس در روی تخته خط نظر احداث کند قبل از حصول خط از آنجا
نرود میباید یک اجوان دیگر با بیدق در پهلوی مهندس ایستاده باشد
تا هر وقت که خط نظر در روی تخته احداث شد آن وقت با بیدق
نماید که آن اجوان از آنجا بجای دیگر رفته بیدق را در سر میخ نصب نماید
هر وقت اجوانیکه سوکل میخها است نزدیک میخ رفت که عدد ۵
یا ۱۰ یا ۱۵ یا ۲۰ یا اعداد دیگر از این قبیل که مضروب ۵ میباشند
در او نوشته شده است باید قلیکه در دست دارد دایرهٔ در هوا
احداث میکند و اجوانیکه در پهلوی تخته ایستاده است همان طریق
با او جواب میدهد اگر چنانچه جواب نداد میباید مراجعت نموده پهلوی
میخ سابق که قابل قسمت بپنج است برود و از آنجا باز اعداد
میخها را بترتیب در نموده تا بعدد یکه قابل قسمت بپنج است برسد
و از این قرار هرگز اجوانیکه سوکل میخها است در زمینگیر نمانید

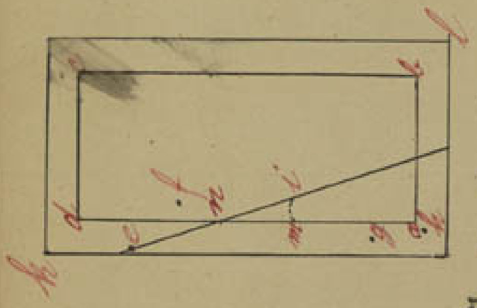
سرکوان

سرکوان نمیکند و هرگز نمیباید اجوان سوکل میخها در وقت رفتن
از نقطه بنقطه سر بیدق را بالا بگیرد بلکه میباید همیشه بیدق را از زیر
نگاه بدارد پس از آنکه مهندس از مقامیکه همه نقطه‌ها را که میخواست
قراول رفته خطوط نظر را کشید یک بیدق در آنجا زده بجای دیگر
میرود تا خطوط نظر حاصل شده را با خطوط دیگر که در آنجا احداث
میکنند متقاطع نماید در آنحالت نیز اجوان سوکل میخها بترتیب
سابق یا بالعکس موافق آنچه که مهندس باو دستور العمل داده است
باید قدم که دارد از نقطه بنقطه رفته میایستد و مهندس در روی تخته
سنجاق نصب میکند که متعلق باشد بنقطه که در زمین معین
کرده است و پس از آن شروع بقراول رفتن نموده خطوطی که احداث
با خطوط سابقا احداث شده تقاطع میکنند و در این مقام با اجوان
سوکل میخها همینکه با بیدق اعلام رفتن از نقطه بنقطه رسید میباید

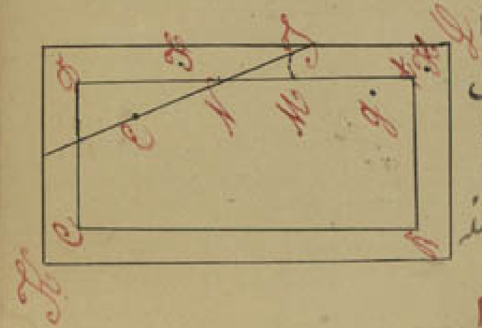
نیز را اگر در آن نقطه کوچیده بود بکنند و همراه خود ببرند تا وقتیکه عمل تمام
میشود متخانیز کلاً کنده شده باشند اشیاء واقعه در زمین را
اغلب بهنگام استراحت یا آنکه در خانه از روی نقشه که در جزوه کس
خود یادداشت کرده اند میکشند را بعداً در وصل کردن چند
نقشه بیکدیگر در حالتیکه از ابزار زمین پیمائی با مقیاسیکه از برای
این عمل قبول شده است یک تخته کفایت نکند و محتاج بده
یا چند تخته دیگر باشند یک کاغذ یا یک تخته میگیرند که بیست و چهار
ابهام طول و شانزده ابهام عرض داشته باشد و آنرا قطعه
مینامند که بزبان فرانسه سیکیون باشد پس از آن مقیاس را
نیز تحویل نموده کوچکتر مینمایند تا بتوانند در روی یک تخته زمینیرا که میخواهند
به پیمایند درسته به تمامه رسم نمایند آنوقت زمین را مجموعه
در روی آن کاغذ و با مقیاس تحویل کرده اجمالاً رسم نمایند یا نقشه

مغرذا

مغزکه بهمان جبائه شکل را معیّن میکنند و بعد آن قطعه را چند
مربع مستطیل قسمت مینمایند و بعد آن مربع های مستطیل موافق
اندازهٔ مقیاسیکه از ابزار زمین پیمائی مقرر است در روی تخته‌ای
دیگر ترسیم میکنند پس نسبت مربع های مستطیل کوچک بمقیاس تحویل شده
شکل نسبت مربعهای مستطیل بزرگ میشود بمقیاسیکه از برای زمین
پیمائی معیّن است جبایل زمین را که همه در روی یک تخته رسم شده اند
با یک نسبت درست در روی مربع های مستطیل بزرگ کشیده و دیگر ترسیم
میکنند و پس از آن همه اشیائیکه در زمین موجود اند مجموعه بتفصیل
رسم می نمایند (شکل ۱۱۴) اگر زمینیرا که باید مجموعه نا
وسیع باشد و یک ابزار ترسیم آن کفایت نکند بقاعده مفصله
ذیل عمل می نمایند در یک قطعه شکل کلیه را رسم شکل ۱۱۴
که در روی آن ترسیم جبائه شده است از طرفین خط الحد



۱۳ شکل ۱۱۴



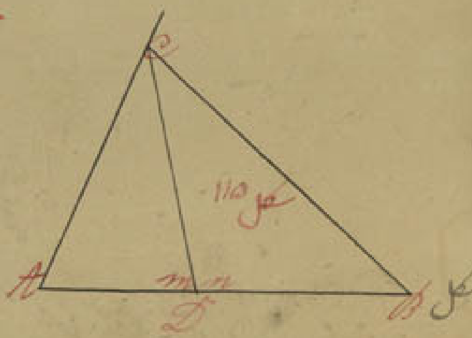
و در زمین آن چند نقاط ثابت نشان میکنند مثلاً مثل نقاط
… و … و … و … و … در قطعه مذکوره و در یک قطعه
دیگر که بهمان اندازه باشد مثل قطعه … از نقطتین …
و … مثل پرگار قوسهای … و … و … را احداث
مینمایند تا نقطهای … و … معین شوند و بهمان قاعده
نقطهای … و … را نیز مشخص نموده خطین … و … را
موازی هم میکنند و سایر نقاط را نیز که … و … و
وغیرهم باشند درست و با تناسب ترسیم مینمایند و پس از آن
شروع بترسیم جاده و تفصیل قطعه … میکنند و در جائیکه
زمین پست و بلند باشد و بآن واسطه اندازه درست خط … را
نتوان گرفت در آنصورت طول او را تخمیناً برآورد نموده شروع
بر پیمودن مینمایند تا بزمین سطحی برسند که از آنجا بتوان با کمال

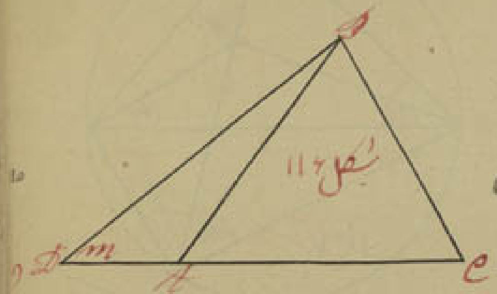
دقت

یک خط مستقیم اندازه گرفت بعد از اندازه گرفتن یک فاصله در روی زمین که آن فاصله
در روی کاغذ یا تخته سا[illegible] رسم نمود بعد از تقسیم کردن آن فاصله در روی کاغذ بانقدر
قسمتهای متساویه که تواند از برای اندازه فاصله که در زمین گرفته بودند بقدر بتوان
یک مقیاس تخمینی حاصل نمود از برای منظورهای نظامی و سپاهی که نمیتوان تخته
همراه خود برداشت مثلاً در هنگام جنگ آنوقت یک اسباب [illegible] مینمایند
که آنرا پیکار سنا [illegible] و در لسان فرانسه گونیا یا کاتوپ تریک میگویند بواسطه
آئینه که در یک سمت آن قرار گذاشته شده است از نگاه داشتن دوربین بدست
در کمال سهولت زوایای لازمه مطلوبه را میتوان پیدا کرد و میتوان در اینجا
بقاعده مساحت نظر بر عمل نمود و در این قاعده هیچ آلت و اسبابی احتیاج
نیست و با نظر و تخمین میتوان زوایا را برآورد نموده فاصلهها را با قدم اندازه
گرفت و باید جهت لازم است که در زمین پیمائی با تخته [illegible] یا عمل زیادی نموده
باشند و تجربه کامل حاصل کرده باشند که بعد از این میتوان حدس صائب

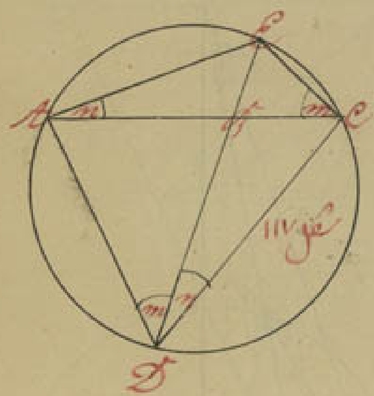
وخطای مستقیم واست فصل اول این باب بقضیهٔ مذکورهٔ ذیل ختم مینمائیم که منصوب و منتماست باسم مصنف آن و باید بواسطهٔ او اقضیه پوتنوت میگویند که سه نقطهٔ A و B و C در روی زمین داده شده است و فاصلهٔ آنها نیز از یکدیگر معلوم است میخواهند از یک نقطهٔ دیگر که نقطهٔ D باشد تا نقاط A و B و C بیابند در صورتیکه از نقطهٔ D نقطهای A و B و C دیده شوند و از برای این پنج حالت است اولا در حالتیکه نقطهٔ D واقع شده باشد در یکی از اضلاع مثلث ثانیا در حالتیکه نقطهٔ D واقع شده باشد در امتداد یکی از اضلاع مثلث ثالثا در حالتیکه نقطهای A و B و C در یک خط مستقیم واقع باشند و نقطهٔ D در خارج واقع شده باشد رابعا در حالتیکه نقطهٔ D واقع شده باشد خارج از مثلث ABC خامسا در حالتیکه نقطهٔ D واقع شده باشد در داخل مثلث ABC اولا (شکل ۱۱۵)

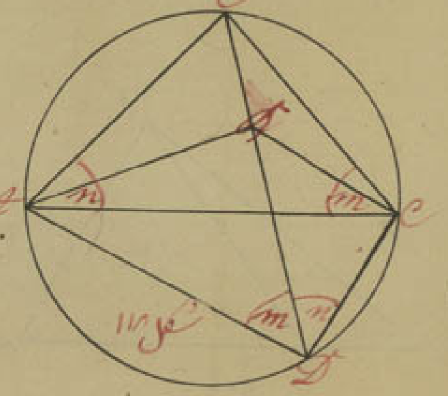
فاصله





چون در مثلث DCB از معلوم بودن زاویهٔ m و زاویهٔ C و ضلع CB خطوط DB و DC معلوم میشوند ثانیا (شکل ۱۱۶) چون در مثلث ABD زاویهٔ m و زاویهٔ ABD و ضلع AB معلومند پس بواسطهٔ خطوط AD و CD و BD معلوم میشوند ثالثا (شکل ۱۱۷) دایرهٔ در دور نقاط A و C و D رسم میکنند در مثلث CEA بواسطهٔ معلوم بودن زاویتین m و n و ضلع AC ضلع CE مشخص میشود و همچنین در مثلث CEB از معلوم بودن ضلعین CB و CE و زاویهٔ m زاویهٔ CED مشخص میشود و در مثلث CED از معلوم بودن ضلع CE و زاویتین m و n ضلعین CD و ED معلوم میشوند پس بواسطهٔ اینها فاصلهٔ AD نیز معلوم میشود





رابعاً (شکل ۱۱۸) در نقاط [illegible] و [illegible] و [illegible] دایره‌ای رسم
مینمایند در مثلث [illegible] از معلوم بودن ضلع [illegible] و زاویتین
m و n ضلع [illegible] معلوم میشود و همچنین در مثلث [illegible]
از معلوم بودن ضلعین [illegible] و [illegible] و زاویهٔ [illegible] زاویهٔ
[illegible] مشخص میشود پس در مثلث [illegible] از معلوم بودن
ضلع [illegible] و زاویتین m و [illegible] ضلع [illegible] مشخص
میشود و بواسطهٔ آن فاصلهٔ [illegible] و [illegible] نیز معلوم میشوند



خامساً (شکل ۱۱۹) یکدایره بدور نقاط [illegible] و [illegible] و [illegible]
رسم مینمائیم در مثلث [illegible] از معلوم بودن ضلع [illegible]
و زاویتین a و [illegible] که مساویند به m - ۱۸۰ و [illegible] - ۱۸۰
ضلع [illegible] را نیز مشخص میکنیم و در مثلث [illegible] ضلع
[illegible] و ضلع [illegible] و زاویهٔ [illegible] معلومند زاویهٔ [illegible] را
مشخص

مشخص مینمائیم پس در مثلث [illegible] از معلوم بودن ضلع [illegible] و زاویتین
[illegible] و [illegible] فاصله از [illegible] تا [illegible] معین میشود و بواسطهٔ فاصلهٔ
از [illegible] تا [illegible] و از [illegible] تا [illegible] مشخص میشوند

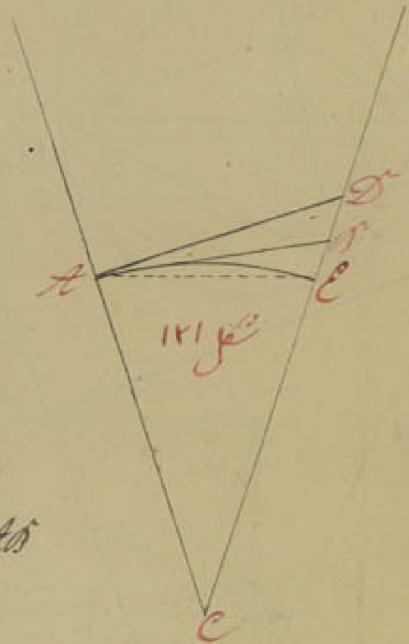
فصل پنجم

در بیان کیفیت تفاوت ما بین افق حقیقی زمین با افق ظاهر آن و کیفیت مشخص نمودن زوایای
ارتفاع و زوایای عمق



(شکل ۱۲۰) اگر فرض بشود [illegible] و [illegible] نصف قطر کرهٔ
زمین و نقطهٔ [illegible] مرکز آن باشد و [illegible] عمود باشد بر [illegible] و
[illegible] عمود باشد بر [illegible] در شکل مذکور [illegible] زاویهٔ ارتفاع
ظاهر است و [illegible] زاویهٔ عمق ظاهر است و [illegible]
با [illegible] زوایای حقیقی ارتفاع و عمق میباشند و خط [illegible] تفاوت
ما بین ارتفاع افق ظاهر است نظر به فاصلهٔ [illegible] از زوایای ارتفاع و عمق

ظاهر کر اندازه کرده شده باشند از فاصله افقی EAH از نقطتین A و H
دو از نصف قطر زمین CA بواسطه حساب مخصوص ذیل زاویه حقیقی
ارتفاع و عمق امیتوان پیدا کرد در شکل ۱۲۰ زاویه $EAB = EAD + DAB$
$gBt = FBt - gBF$ و زاویه DAB
در (شکل ۱۲۱) زاویه DAB ـ $EAB = EAD - DAB$
ولا کن زاویه $\frac{1}{2}C = FBg$ ، $EAD = gBF$ پس در شکل ۱۲۰
$gBt = FBt - \frac{1}{2}C$ و $EAB = \frac{1}{2}C + DAB$
و در شکل ۱۲۱ DAB ـ $EAB = \frac{1}{2}C - DAB$ اگر نصف قطر
CA مساوی شده و فاصله افقی EA مساوی باشد a زاویه C را
بایر طرق میتوان پیدا نمود $C : a = ۳۶۰ : ۲a\pi$
$C = \frac{۳۶۰ \cdot a}{۲a\pi} = \frac{۱۸۰ \cdot a}{a\pi} = \frac{۱۰۸۰۰}{a\pi}$ دقیقه . و
نصف قطر زمین که a باشد مساویست ۳۳۵۶۶۱۱ توازن پس زاویه
دقیقه ۱.۰۲ C



$\overline{AD}^2 = BD \times Dg$

$\overline{DL}^2 = \overline{AL}^2 + \overline{AD}^2$

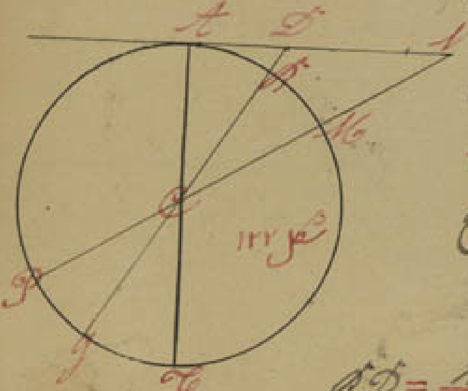
$(DB + BL)^2 = \overline{AL}^2 + \overline{AD}^2$

$\overline{AD}^2 = \overline{DB}^2 + ۲DB \times BL - \overline{BL}^2 - \overline{AL}^2 =$

$= DB(DB \times ۲BL) =$

$= DB \times Dg$

دقیقه ۱.۰۲ $C = ۱.۰۲$ در شکل زاویه $EAB = DAB + ...$
دقیقه ۰.۵۱ $gBt = FBt - \frac{1}{2}C$ و $DAB + ۰.۵۱$
دقیقه ۰.۵۱ $FBt = \frac{1}{2}C$ و در شکل ۱۲۱ $- ۰.۵۱$
$DAB - ۰.۵۱$ دقیقه $EAB =$ مثلا فرض
میکنیم که در شکل ۱۲۰ از برای زاویه ارتفاع ظاهری DAB
۴″ ۵۷′ پیدا کرده اند و از برای اندازه فاصله افقی EA که
مساویست a ۱۹۶۰ توازن پیدا کرده اند از اینجا میتوان زاویه ارتفاع
حقیقی را پیدا کرد و آن میشود $EAB = ۴″ ۵۷′ +$
$۰.۵۱ \times ۱۹۶۰ = ۴″ ۵۷′ + ۱′ = ۴″ ۵۸′$ دقیقه



از برای فاصله قبل AD در (شکل ۱۲۲) ارتفاع
افق ظاهری را که BD باشد باین طرق پیدا میکنند
$BD = \frac{\overline{AD}^2}{Dg} = \frac{\overline{AB}^2}{AF}$ و $\overline{AD}^2 = BD \times Dg$

فرض میکنیم ۲۰۰ تواز = Ar و چون Mr که قطر زمین است

مساویست ۶۷۱۳۲۲۳ تواز پس این حاصل میشود Dr =

۵ر۱۴۸''' = ۰٫۰۰۵۹۵ تواز = $\frac{40000}{6713223}$ یا باین طریق

$AC - CD = Cr - CD = Dr$ و در مثلث

قائم الزاویه ACD ضلع $CD = \sqrt{AC^2 + AD^2}$

پس $Dr = \sqrt{AC^2 + AD^2} - AC$ فرض میکنیم

مثل سابق که ۲۰۰ = AD و چون AC از بابت نصف

قطر بودن زمین مساویست ۳۳۵۶۶۱۱ پس این حاصل میشود

۵ر۱۴۹''' = ۰٫۰۰۵۹۶ = Dr و همچنین میتوان

از برای یک فاصلهٔ مثل Ma ارتفاع افق ظاهری x را باندازهٔ خط

حاصل نمود در اینصورت میباید باین طریق حساب کرد در شکل

$Dr = \frac{AD^2}{AC}$ و $Mr = \frac{AM^2}{AC}$ پس

$\frac{AM^2}{AC}$

$\frac{AM^2}{AC} : \frac{AD^2}{AC} = Mr : Dr$ یا آنکه

$Mr : Dr = AM^2 : AD^2$ فرض میکنیم ۲۰۰ = AD

از برای Dr بواسطهٔ محاسبه این پیدا میشود ۵ر۱۵''' = Dr

فرض میکنیم Ma = AM و ارتفاع افق ظاهری Mr

مساویست x''' از گذاشتن این مقادیر در تناسب مذکوره این

حاصل میشود $x : 5,15 = Ma^2 : 200^2$ و

$x = \frac{5,15\, Ma^2}{40000} = 0,000128755\, Ma^2$''' اگر Ma مساوی باشد

۱۰۰۰ تواز ارتفاع افق ظاهری از برای این فاصله این میشود

۱۲۸٫۷'''

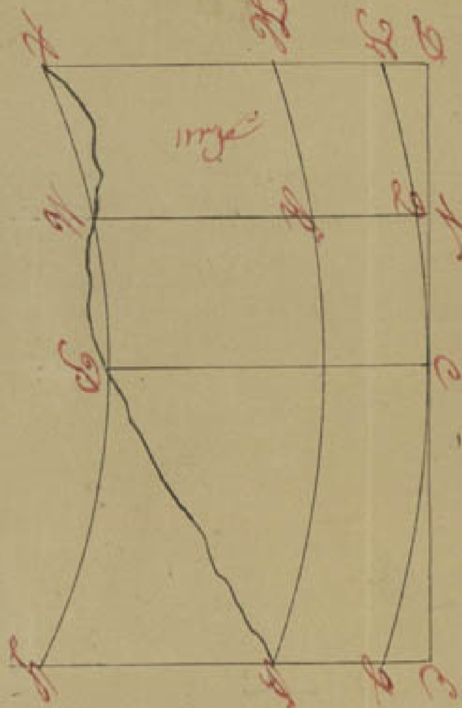
فصل سیم

در پیدا کردن ارتفاع زمین اوّلاً بواسطهٔ عملی که آنرا بزبان فرانسه نیول مان میگویند ثانیاً بواسطهٔ اسبابیکه آنرا بارومتر میگویند

nivélement

baromètre

اولاً گفتگو خواهیم کرد در خصوص عمل نیولمان و آن بایدطریقی است
که بواسطهٔ خطوط نظر عرض تفاوت ارتفاع دو یا چند مکان دیگر را
مشخص میکنند (شکل ۱۲۳) مکرر اتفاق می‌افتد
و لازم میشود که تفاوت ارتفاع دو نقطه را در روی زمین بدانند
مثلاً میخواهند تفاوت ارتفاع نقطتین A و B را بدانند
در حالتیکه از مرکز کرهٔ ارض حساب کنند در نقطهٔ D که در وسط
نقطتین A و L است خط عمود خیال میکنیم که عمود باشد
مثلاً خط عمود DC و همچنین در نقطتین A و B نیز
عمودین DA و EB را خیال میکنیم و از نقطهٔ C به نقطتین E و
D قرار داده بطوریکه خط EC و CD عرض متوازی
باافق زمین باشند اگر عمودین DA و EB دو چوب باشند
که در نقطتین A و B نصب شده باشند نقطتین D و E را در روی



آنها

آنها معین نموده و اندازهٔ DA و EB را مشخص میکنیم از تفریق
چون EB را از DA که مساویست به LE با ...
به HA تفاوت ارتفاع نقطتین A و B معلوم میشود پس

$LG = TI = HT$ و $LB = AH$ و

$LG = AT$ و $EG + LG = TD + TA + AT$

پس $EL = DA$ و چون $LB = EB$ ... $LE - EB$

پس $LB - EB = DA$ این عمل در حالتی بود

که نقطهٔ C درست واقع شده باشد در وسط نقطتین A و L

اگر نقطهٔ C درست در میان نقطتین A و L واقع نشده باشد

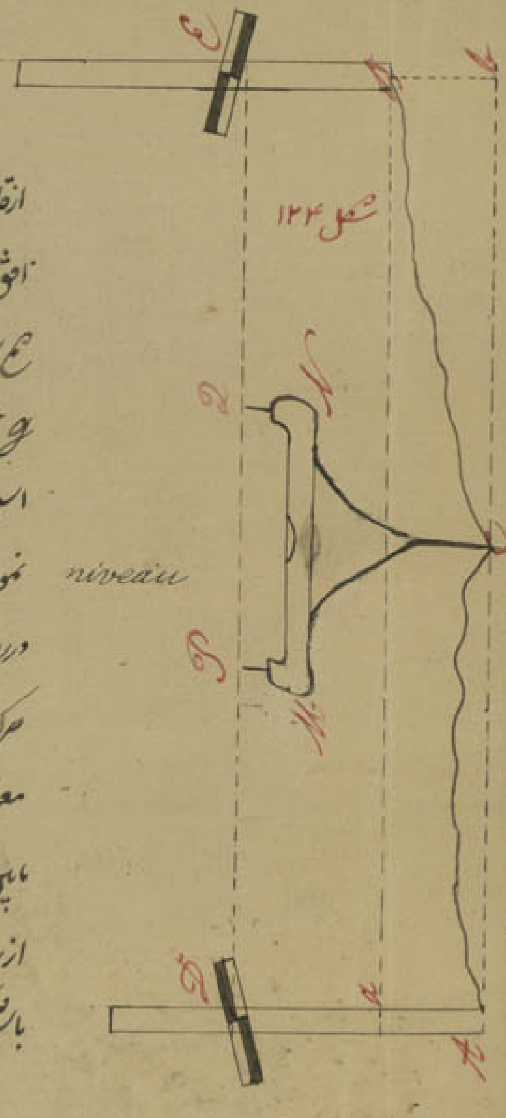
از این قرار عمل مینماییم فرض میکنیم که عوض چوب DA چوب

NM را در نقطهٔ N عمود بگذاریم معلوم است که فاصلهٔ

C و N در این صورت مساوی خواهد بود بفاصلهٔ LE و C در این حالت

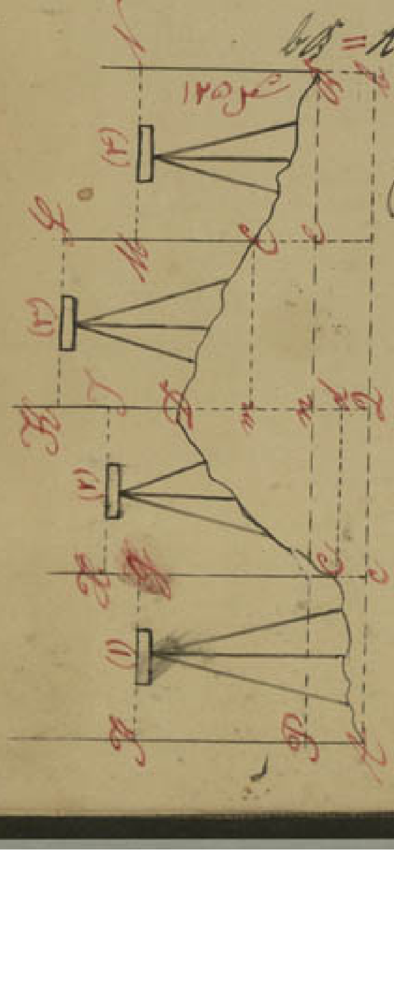
از قاعدهٔ مذکوره میباید فاصلهٔ Ae و Cd را که تفاوت پایین
افق حقیقی و ظاهری است فهمید پس Ae را از Cd و
Cd را از Cd تفریق مینمائیم تفاوت پایین Ae و
Cd که مساویست به Cd مشخص میشود (شکل ۱۲۴)

اسبابیکه بواسطهٔ آن تفاوت ارتفاع دو یا چند نقطه را میتوان مشخص
نمود بزبان فرانسه نیوو مینامند که شکل آن AeP است
در روی چوبی De و CB دو هر یک نشانی هست که میتوان آنهارا
حرکت داده پایین و بالا برد و در روی آنچوبها اندازهٔ پا و پوس و خط
معین شده است مثال اول در پیدا کردن تفاوت ارتفاع
مابین نقطتین A و B بواسطهٔ عمل نیوو در حالتیکه
از روی اسباب نیوو بتوان به هر دو جهت قراول رفت مهندس
باشریک اجودان بنقطهٔ A و یکی بنقطهٔ B میفرستد خود که



با اسباب

با اسباب نیوو در نقطهٔ C میماند و از خط عرض PQ بنقطهٔ C قراول
میرود و همچنین از خط عرض PQ بنقطهٔ D قراول رفته اند
Cb را از DA تفریق میکند و حاصل تفریق ارتفاع نقطهٔ
Ab است از خط عرض یا Aa بعلت اینکه Cb − Ca = ab
و چون Da = Aa پس Da − Db = Cb − Ab = AB
اگر فاصلهٔ AB بطوری باشد که نتوان باین قسم قراول رفت
میباید در روی خط PQ یک ربعی قرار گذاشت مثال دوم (شکل ۱۲۵)
در پیدا کردن تفاوت ارتفاع نقطتین A و B بقاعدهٔ مذکوره
فوق در صورتیکه از روی اسباب نیوو نتوان نقطتین A و B قراول
رفت پس در این حالت میباید اسباب نیوو را چند مقام نقل نمود اولا
باشریک اجودان در نقطهٔ A و یکی را در نقطهٔ C میفرستد و خود که
با اسباب نیوو در نقطهٔ (۱) که تقریبا در وسط نقطتین A و C میباشد



قرار میگیرد و از خط قرار اول عرض ح ح ح بقطبین ح ل و ح را در روی
حجب معین بنماید ثانیاً مهندس باشر اجوانی را که در نقطه B بود بنقطه
D و اجوانی را که در نقطه [illegible] بود بنقطه [illegible] فرستاده و خواهش با اسباب
در نقطه (۲) قرار میگیرد و بواسطه خط قرار اول عرض ح T و [illegible] بقطبین
[illegible] و ح T را در روی حجب معین بنماید ثالثاً مهندس باشر اجوانی را
که در نقطه D بود بنقطه م و دیگری که در نقطه C بود بنقطه D فرستاده
و خواهش با اسباب در نقطه (۳) قرار میگیرد و بواسطه خط قرار اول عرض
L K بقطبین K و L را در روی حجب معین بنماید رابعاً
مهندس باشر اجوانی نقطه م را بنقطه م و اجوانی نقطه D را
بنقطه م فرستاده و خواهش با اسباب در نقطه (۴) قرار میگیرد
و از خط قرار اول عرض [illegible] بقطبین M و M را در روی حجب
معین میکند خامساً اجوانها هریک از برای خود اندازه حجب خانها که در هر نقطه

معین کرده

معین کرده بودند جمع نموده حاصل جمع کوچکتر را از حاصل جمع بزرگتر تفریق بنمایند
حاصل تفریق تفاوت ارتفاع نقطتین [illegible] و [illegible] میشود اگر حاصل جمع اندازه
ارتفاع اجوانیکه اول در نقطه C بود کوچکتر باشد از حاصل جمع اندازه
ارتفاع اجوانیکه اول در نقطه [illegible] بود آن وقت نقطه [illegible] در بلندی واقع
شده است و بالعکس اگر حاصل جمع اندازه ارتفاع اجوانیکه اول در نقطه
C بود بزرگتر باشد از حاصل جمع اندازه ارتفاع اجوانیکه اول در نقطه
[illegible] بود آن وقت نقطه [illegible] در گود در اتفاق افتاده است و فقرات مذکوره

از این قرار معلوم میشود $Cc = AF - Cg$ و

$DK - EL = -Dm$ و $CH - DT = Dd$

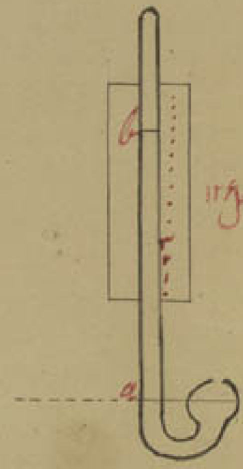
و $Ee = - [illegible] - EM$ پس $AF + CH +$

$+ DK + EM - (Cg + DT + EL + [illegible]) =$

$= (Cc + Dd) - (Dm + Ee) = (d2 + dD) -$

$ab = AP = Qn = DN = DQ - (Dm + mn)$

در بکار بردن بارومتر از برای اندازه گرفتن ارتفاعات



شکل ۱۲۶

بواسطهٔ علم حکمت طبیعی معلوم شده است اینکه هرگاه بارومتر را در یک
بلندی نگاه بدارند وزن ستون هوائیکه جیوه را در بارومتر فشار میدهد محققاً
بقدر ستون جیوه ایست که در لولهٔ بارومتر واقع میشود باید معنیکه میباید
ارتفاع جیوه را میباید از سطح کشیده آن تا سطح بستان شمرد چنانچه
در ستون ab (شکل ۱۲۶) دیده میشود از انجا از برای ما حاصل
میشود اینکه نسبت دو ستون از هوا که قاعده شان یکی و ارتفاعشان باهم
مختلف باشند مثل نسبت ارتفاع جیوه هائیست که در میان بارومترها
واقع شده مثلاً وزن یکستون از هوا در دامنهٔ کوهی که قاعده آن ستون
□ باشد فرض میکنیم که مساویست g و وزن یکستون دیگر
از هوا که همان قاعده را داشته باشد ولاکن در قلهٔ کوه واقع شده

مساوی باشد



مساوی باشد g_1 و ارتفاع جیوه ستون اول a و ارتفاع جیوه ستون
ثانی b باشد و وزن حقیقی یک پوس مکعب از جیوه مساوی باشد m
پس از این مساویها حاصل خواهد شد $g = apm$ و
$g_1 = bpm$ و پس $g_1 : g = a : b$ از برای اینکه ستونها
تفاوت مابین دو ارتفاع یا آنکه تفاوت ارتفاع دو مکان را بواسطهٔ ارتفاع
بارومترها پیدا نمود میباید اول ملاحظه کرد که چگونه قاعده ارتفاع بارومتر
تنزل میکند وقتیکه در افق موافق قانون یک نسبت عددی صعود میکند
مثلاً فرض باشد $MPQN$ (شکل ۱۲۷)
یکستون عمودی از هوا که ابتدای آن در سر افق NM باشد
و در انتهای آن بهوا منتهی شود و فرض میکنیم که این ستون بواسطهٔ سطوح عرضی
mn و pq و rs و غیره منقسم شده باشد بحصه‌ها
قسمت متساوی مثلاً Mm که مساویست mp و مساوی

rp و همچنین ارتفاع ستونهای هوا بترتیب Qll و Qm

و Qp وغیرهم که سطوح متساویهٔ llM و mn و pq

وغیرهم از افق رسیده‌اند مساوی باشند به ll و B و c و D وغیرهم

میخواهیم بدانیم که بچه قانون اوزان مضغوطه که ll و B و c و D

وغیرهم باشند تنزل میکنند اولاً باید از روی علم حکمت طبیعی فهمید که

اوزان حقیقی هوای محبوسه در وسعتهای متساویه نسبت دارند بقوت

یا او ازانیکه بواسطهٔ آن هوا محبوس و نگاه داشته شده است در آن

وسعتها فرض میکنیم که وزن هوا در وسعت mMn مساوی باشد

lb و این هوا فشرده شده است بواسطهٔ قوت B که در ستون هوای

Qm واقع است و در وسعت متساویهٔ pqm فرض میکنیم

که وزن هوا c باشد و این هوا فشرده شده باشد بواسطهٔ قوت

c که در ستون هوای Qp واقع است و همچنین ارتفاعهای بارومتر را

فرض میکنیم

۲ موافق

فرض میکنیم که در نقات llM و m و p و r وغیرهم مساوی باشند

a و b و c و d و همچنین آنچه که ذکر شد اربعهٔ متناسبهٔ مفصله حاصل میشود

$e:d' = D:c' = c:b' = B:a'$ و همچنین ولاکن بالبداهه

معلوم است $B-A = a'$ و $C-B = b'$ و $D-C = c'$

و همچنین پس $D : D-C = C : C-B = B : B-A$

و همچنین باینمعنی که اوزان A و B و C و D وغیرهم

از ستونهای هوا بترتیب یکتناسب عددی تنزل مینمایند بسمت مشتهای الیه

هوا در یکتناسب هندسی بعلت اینکه موافق آنچه که بیان شده است

این اربعهٔ متناسبه حاصل است $A:a = B:b = C:c = D:d$

و همچنین ازاینجا معلوم میشود که بارومتر تنزل مینماید در m و p

و r وغیرهم موافق قانون یکتناسب هندسی و حال آنکه ارتفاعات

این نقات در روی افق Mr llM بقانون یکتناسب عددی است

فرض میکنیم که ارتفاع h b مساوی h و ارتفاع x b مساوی

x باشد و x b = xn h b با آنکه $x = nh$

و $n = \frac{x}{h}$ ارتفاع بارومتر در نقطهٔ b مساوی است a

و در نقطهٔ h مساوی است c و در نقطهٔ x مساوی است b

پس ارتفاع بارومتر در نقاط n ۳ ۲ ۱ ۰

موافق تناسب هندسی از این قرار میشوند

$$a,\ c,\ \frac{c^2}{a},\ \frac{c^3}{a^2},\ \ldots\ldots\ \frac{c^n}{a^{n-1}} = a\left(\frac{c}{a}\right)^n$$

و چون در نقطهٔ n ارتفاع بارومتر b بود پس این تساوی حاصل میشود

$b = a\left(\frac{c}{a}\right)^n$ یا آنکه $b = a\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{x}{h}}$

و از این تساوی بقاعدهٔ لوگاریتم این حاصل میشود

$x = h\,\frac{\log a - \log b}{\log a - \log c}$ این تساوی مینماید که بواسطهٔ

ارتفاعات متوسطهٔ بارومتر که ارتفاعهای a و b در مکانی

b و x

---

b و x باشند بدین طریق میتوان پیدا کرد تفاوت ارتفاعات x که

باشد مساوی است x b و هنگامی که بتوان ارتفاع بارومتر را که c

میباشد در یک مکان دیگر که h است پیدا نمود و ارتفاع آن مکان در روی

قاعدهٔ b مساوی است h و مساویست x b بواسطهٔ هندسه

یا بواسطهٔ علم مثلثات بسهولت میتوان معین نمود اینز ارتفاع بارومتر را

که c میباشد در روی ... ملاحظه بنمایند که بارومتر در مکان b با ارتفاع

متعارفی یا متوسط خود باشد مثلاً در طهران از برای ارتفاع متعارفی بارومتر

که a باشد این حاصل میشود $a = 324.4^{III}$ و در نیاوران در قصر شاهی

از برای ارتفاع متعارفی بارومتر که c باشد این حاصل میشود $c = 320^{III}$

و همچنین در قلهٔ کوه دماوند از برای ارتفاع متعارفی بارومتر که b باشد این حاصل

میشود $b = 190.9^{III}$ بواسطهٔ میزان الاستوا که نیول ... باشد

بسهولت میتوان پیدا کرد که از برای ارتفاع مکان عمارت نیاوران

نسبت بشهر طهران که h باشد این حاصل میشود $h = ۶^{o} = ۳۶۰^{I}$

اگر بخواهند ارتفاع کوه دماوند را نسبت بسطح طهران بفهمند این حاصل میشود

$$x = h\frac{\log a - \log b}{\log a - \log c} = ۳۶۰^{I}\frac{\log ۳۲۴۴ - \log ۱۹۰۹}{\log ۳۲۴۴ - \log ۳۲۰} =$$

$= ۱۳۹۷۸$ این قضیه را میتوان باز بسهولت پیدا کرد اگر

ممکن شود که یک قسمتی از قله کوه دماوند رو بدامنه کوه چند توازی پیموده

در آنصورت دیگر احتیاج بدانستن ارتفاع بنا در ان نخواهد بود مثلا

فرض میکنیم که از قله کوه دماوند رو بسمت دامنه آن بدرستی و سهولت

۴۰ که مساویست به ۲۴۰^{I} پیمودند و در آنجا از برای ارتفاع بارومتر

که c باشد این حاصل میشود $۱۹۲٫۶۵^{III} = c$ در این حالت

از برای h این حاصل میشود $h = x - ۲۴۰^{I}$ پس

$$x = (x - ۲۴۰)\frac{\log a - \log b}{\log a - \log c} = x\frac{\log a - \log b}{\log a - \log c} - ۲۴۰\frac{\log a - \log b}{\log a - \log c};$$

$$x\left(\frac{\log a - \log b}{\log a - \log c} - ۱\right) = ۲۴۰\frac{\log a - \log b}{\log a - \log c}$$

یا آنکه

$$x\left(\frac{\log c - \log b}{\log a - \log c}\right) = ۲۴۰\frac{\log a - \log b}{\log a - \log c}$$

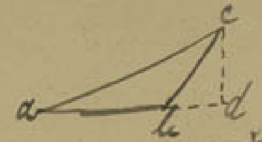
$$x = ۲۴۰\frac{\log a - \log b}{\log a - \log c} \times \frac{\log a - \log c}{\log c - \log b}$$ و

$$= ۲۴۰\frac{\log a - \log b}{\log c - \log b} = ۲۴۰\frac{\log ۳۲۴۴ - \log ۱۹۰۹}{\log ۱۹۲٫۶۵ - \log ۱۹۰۹} = ۱۳۹۴۴^{I}$$

تمت الکتاب بعون الملک الوهاب بتاریخ شب جمعه

یازدهم شهر رجب المرجب سنه ۱۲۷۱ هجری و سنه ۱۸۵۵

عیسوی

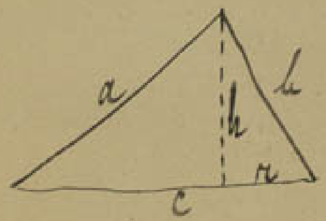


$$\overline{ac}^2 = (ab+bd)^2 + \overline{dc}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{bd}^2 + 2ab \times bd + \overline{dc}^2$$

$$\overline{bc}^2 = \overline{bd}^2 + \overline{dc}^2 \qquad \overline{dc}^2 = \overline{bc}^2 - \overline{bd}^2$$

$$\overline{ac}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{bd}^2 + 2ab \times bd + \overline{bc}^2 - \overline{bd}^2$$

$$\overline{ac}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{bc}^2 + 2ab \times bd$$



$$a^2 = h^2 + (c-r)^2$$

$$h^2 = b^2 - r^2 \quad \text{و} \quad b^2 = h^2 + r^2$$

$$a^2 = h^2 + c^2 + r^2 - 2cr$$

$$a^2 = b^2 - r^2 + c^2 + r^2 - 2cr$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cr$$

سامعه [illegible]

طلا لیره [illegible] ۰۴۳۵۴ [illegible]

[illegible] ۰۲۹۴۵

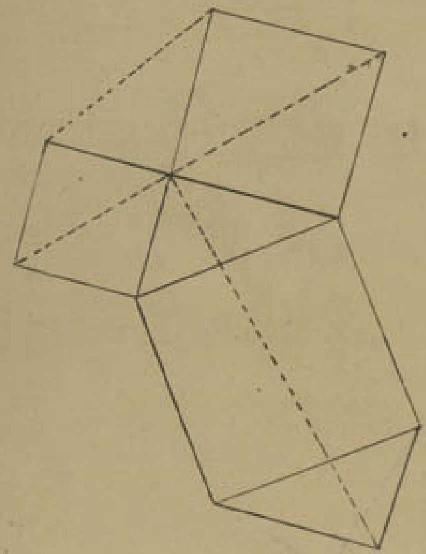
~~نقره [illegible] ۰۵۵۵۵۷ [illegible]~~

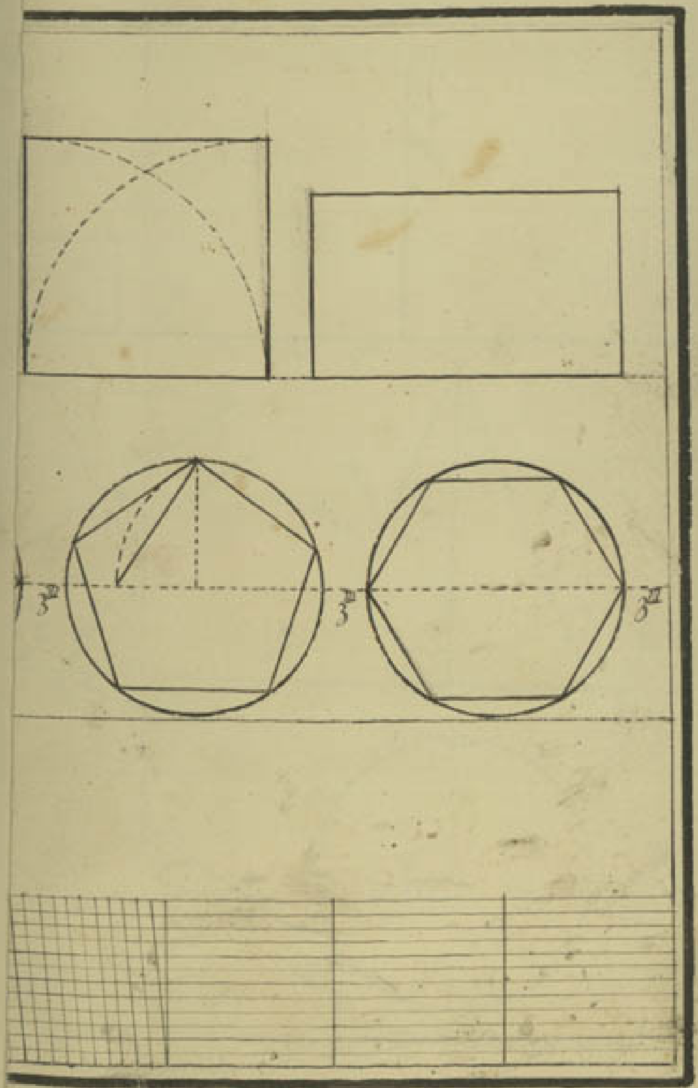
نقره جنس ۱۷۴۹۵

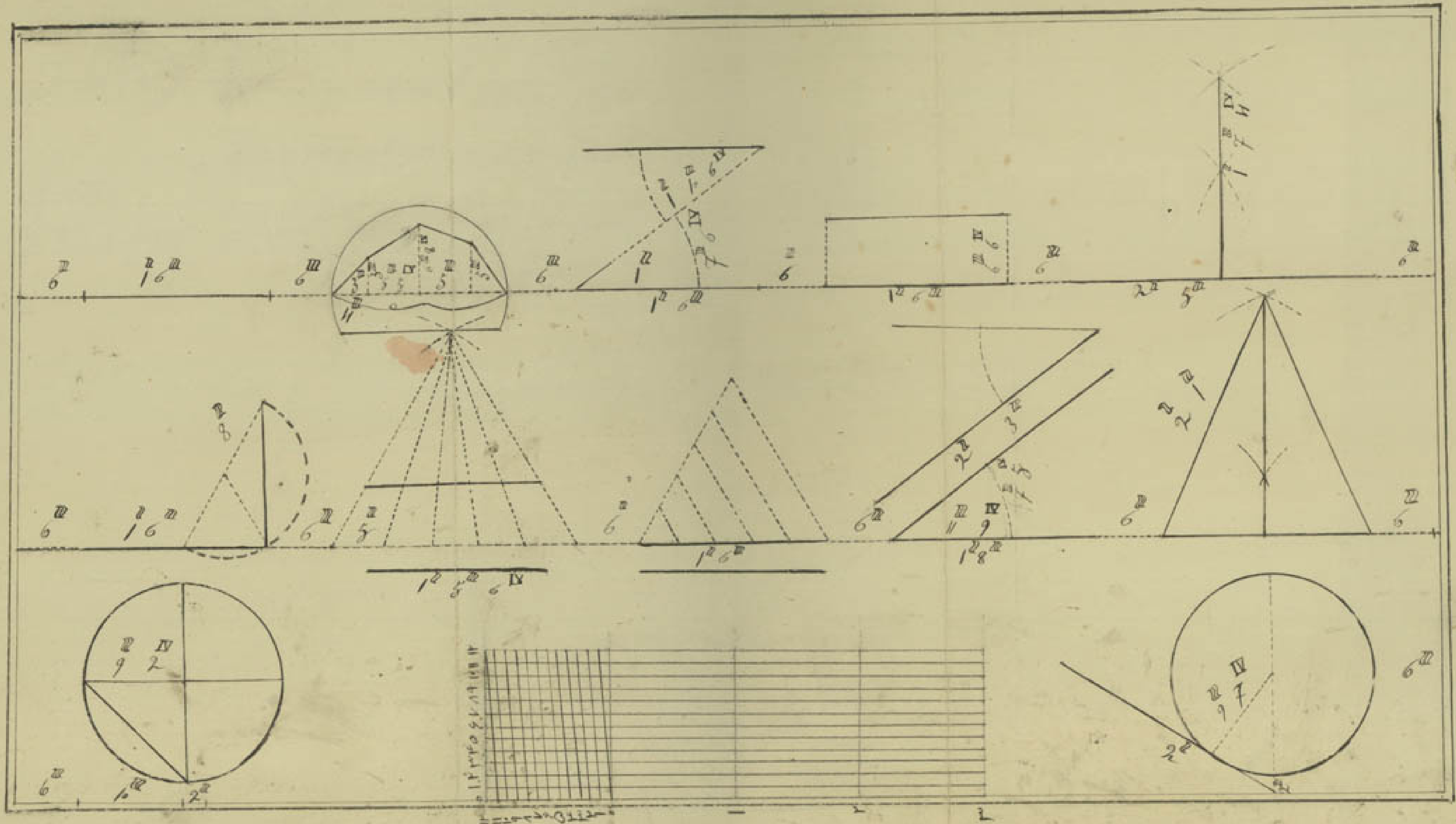
طلا [illegible] ۰۶۲۵۳

سلطنت میرزا محمد ملک ۰۴۸۶۵

~~حبس ۲۶۵۹۳~~







$y = \sqrt{2px} = \sqrt{2p} \times x^{\frac{1}{2}}$ اندازهٔ مربع خط پارابل از این قرار معین میشود

$F = \sqrt{2p} \times \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{2}{3} \times x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2px} \times \frac{2}{3}x$

$F = \sqrt{2px} \times \frac{4}{3}x$ اندازهٔ مربع تمام شکل هم میشود

$y^2 = 2px$

$y^2\pi = 2px\pi = \frac{2px^2\pi}{2} = px^2\pi$ و اندازهٔ مکعب این قسم میشود

$2px^2\pi$ از تمام شکل هم میشود

مسئله جبر و مقابله

قصابی خرید عدد معینی از گوساله و گوسفند و از برای یک از آنها داد چندین شاهی که برابر عدد گوسفندان بود و از برای هر یک از آنها [illegible]
از آنها اگر چهار شاهی علاوه تر داده بود از برای هر یک از آنها و دو شاهی علاوه تر از برای هر یک از آنها [illegible] دیگر هم [illegible]
هرگاه قیمت هر گوسفند بقدر قیمت گوساله شد و فرض [illegible] ۵۶ قران و هشت شاهی پس از هر یک چند داد به [illegible]
چند است در این مسئله هر قرانی ۱۲ شاهی فرض شده است عدد گوساله x و عدد گوسفند y قیمت گوساله [illegible]
قیمت گوسفند $\frac{xy}{2}$ قیمت یک گوسفند $\frac{x}{2}$ قیمت یک گوساله y است [illegible] حاصل می شوند

$$(x+4)y+\left(\frac{x}{2}+2\right)y=xy+\frac{xy}{2}+84$$

$$y^2+xy=680$$

$x=23$

$y=24$

شخصی دو جور ماهوت خرید بقیمت ۸ تومان ۱۵ قران در صورتیکه هر تومان سه قران فرض شود قیمت هر ذرع از اعلا [illegible]
داد چند [illegible] قرانیکه مساوی بود به [illegible] ذرع ماهوتیکه او داشت [illegible] ذرعی از پست ترین چند قرانی داد که مساوی بود با ذرعهای
اعلا ترین و جمع قیمت اعلا ترین را نسبت بقیمت پست ترین مثل ۱۴ است به ۹ حال از هر کدام چند ذرع [illegible]

جواب ۷ و ۹

عدد [illegible] مشتمل بر سه رقم که ارقام آن واقع شده است به تناسب عددی و رقم اول و واسطه [illegible] مابین مجموع و فاضل
دو رقم دویم و سیم [illegible] نسبت [illegible] بمعکوس آن مثل نسبت ۱۸۱ است به ۱۵ جواب ۳ و ۴ و ۵ و ۴

عدد [illegible] انها x و قیمت یک [illegible] y است و [illegible] حاصل می شوند

$$y+\sqrt{x}=\frac{x}{17/123}$$

و $(x+y):\left(\sqrt{x}-\frac{y}{2}\right)=246{,}6797:1$ جواب $x=49$ و $y=3\frac{6}{7}$ تومان

تاجر دو جور ماهوت دارد سئوال کردیم از او ذرع و قیمت هر یک را جواب داد ذرعهای ماهوت اعلی ۷ ذرع زیادتر از ذرعهای ماهوت [illegible] است
بعد گفت هرگاه ۵ بفروشم هر ذرعی از ماهوت [illegible] را بقیمت هر ذرع از ماهوت اعلی در جمع فروش [illegible] ذرع از ماهوت اعلی [illegible] و هرگاه
بفروشم هر ذرع اعلی را بقیمت هر ذرع از ماهوت [illegible] هر یک از این دو ماهوت [illegible] اول مجموع [illegible] مثل نسبت ۵۰ است
به ۸۱ ما خریدیم ۵ ذرع از اول و سه ذرع از دوم را به ۱۵ تومان میخواهیم معلوم نمائیم ذرع و قیمت هر یک را جواب

۱۸ ذرع و ۲۵ ذرع قیمت ۱۸ و ۲۰ فرض

ذرع اول	ذرع دوم	قیمت یک ذرع دوم	قیمت یک ذرع اول	
$(x+7)$	x	y	$\frac{150-3y}{5}$	

و اینکه عاید میشود از فروش دوم بقیمت اول $x\left(\frac{150-3y}{5}\right)$ قیمت ذرع دوم xy قیمت ذرع از اول $\frac{300-6y}{5}$

$$\left(\frac{150-3y}{5}\right)x+\frac{300-6y}{5}=xy \qquad (1)$$

و اینکه عاید میشود از فروش اول بقیمت دوم $(x+7)y$ قیمت اول $(x+7)\frac{150-3y}{5}$ قیمت دوم xy

$$(x+7)y:xy+\frac{(x+7)(150-3y)}{5}=50:81 \qquad (2)$$

قنادی دو جور شکلات دارد سئوال کردیم از او قیمت هر یک را جواب گفت ۵ من زیادتر از آنچه از شکلات [illegible] فروختم به ۳ صاحبقران
از شکلات بد فروختم ۲۵ تومان و همچنین هرگاه بفروشم ۸ من از بد را بقیمت خوب و ۱۳ من از خوب را بقیمت بد بقدر ۱۰ صاحبقران
کمتر از آنکه بفروشم هر یک را بقیمت خود عاید من میشود حال میخواهیم بدانیم که هر یک من از هر کدام چند صاحبقران ارزد و جمله [illegible]

درجات عرض شمالی پاره از بلاد که از خط استوا محسوب شده

	دقیقه	درجه
قزوین	۱۰	۳۶
رشت	۲۰	۳۷
زنجان	۴۰	۳۶
تبریز	۵	۳۸
اردبیل	۱۰	۳۸
خوی	۳۰	۳۸
ارومی	۳۲	۳۷

	دقیقه	درجه
طهران	۴۰	۳۵
قم	۳۸	۳۴
کاشان	۰	۳۴
اصفهان	۳۸	۳۲
شیراز	۳۰	۲۹
بوشهر	۰	۲۹
مسکی	۱۳	۲۷
همدان	۵۰	۳۴
کرمانشاه	۲۰	۳۴
بغداد		
کربلا	۴۵	۳۲
بصره	۳۰	۳۰
محمره	۲۰	۳۰
دزفول	۱۰	۳۲
شوشتر	۰	۳۲
بروجرد	۵۰	۳۴

طول بلد پاره بلاد که از لندن محسوب شده

	ثانیه	دقیقه	درجه
بوشهر	۰	۵۰	۵۰
شیراز		۴۲	۵۲

$x^2y^2+4xy=96$ ۹
$x+y=6$

$x(xy+12y)=234x+2y-261$ ۹
$2x^3-y^3=x^2y$

$x^3-y^3=56$ ۹
$x-y=\frac{16}{xy}$

$x^2+4y^2=256-4xy$ ۹
$4y^2-x^2=64$ ۴

$x^2+y^2+2xy+2x+2y=120$ ۹
$xy-y^2=8$

$x^2+y^2-x-y=78$
$xy+x+y=39$

$10x+y=3xy$
$9y-9x=18$

$x^2+y-x-2=18-y$ ۹
$xy=6$

$x^2+x^2y^2-(x+y)^4=270$
$\frac{x^2-2xy+y^2}{9}=0$

$(x+y)(x^2+y)=65$ ۹
$xy(2x^2-y^2)=32$

$(x+y):(x-y)=12:5$
$y^2-x=25$

$x^2+y^2+x-y=132$ ۹
$(x^2+y^2)(x-y)=1220$

$x^3-xy^2+x^2y=16$
$y^3-2xy-y^2=32$

$8x+233y=2x^3+2y^3$ ۹
$24y+6x^2-5y^2=13xy+24$

$\frac{x^2+xy+y}{x+y}=7$
$\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}=9$

$x^2+4y^2=256-4xy$
$4y^2-x^2=64$

$x^3-y^3=56$
$x-y=\frac{16}{xy}$

$x^2y^2+4xy=96$
$x+y=6$

ساور

$x^2y+xy^2=30$
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6}$

جواب $x=3$ و $y=2$

$x^2+y^2-x-y=78$
$xy+x+y=39$

$x^2+y^2+2xy+2x+2y=120$
$xy-y^2=8$

$x(xy+12y)=234x+2y-261$
$2x^3-y^3=x^2y$

$(x+y)(x^2+y)=65$
$xy(2x^2-y^2)=42$

$x^2+y-2=18-y$
$xy=6$

~~$x^2+y^2+2xy+2x+2y=120$~~
~~$xy-y=8$~~

$10x+y=3xy$
$9y-9x=18$

$8x+233y=2x^3+2y^3$
$24y+6x^2-5y^2=13xy+24$

$x^2+y^2+x-y=132$
$(x^2+y^2)(x-y)=1220$

$x^3-xy^2+x^2y=16$
$y^3-2xy-y^2=32$

$(x+y):(x-y)=12:5$
$y^2-x=25$

$x^4+x^2y^2-(x+y)^2=270$
$\frac{x^2-2xy+y^2}{9}=0$

$x^2+y\sqrt{xy}=18$
$y^2+x\sqrt{xy}=9$

$y=1$
$x=4$

$\frac{x^2+xy+y}{x+y}=7$
$\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}=9$

درجه	sinus	tangente	درجه	sinus	tangente
۰	۰٫۰۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰۰	۹۰	۱٫۰۰۰۰	۵۷٫۲۹۰۰
۱	۰٫۰۱۷۵	۰٫۰۱۷۵	۸۹	۰٫۹۹۹۸	۵۷٫۲۹۰۰
۲	۰٫۰۳۴۹	۰٫۰۳۴۹	۸۸	۰٫۹۹۹۴	۲۸٫۶۳۶۳
۳	۰٫۰۵۲۳	۰٫۰۵۲۴	۸۷	۰٫۹۹۸۶	۱۹٫۰۸۱۱
۴	۰٫۰۶۹۸	۰٫۰۶۹۹	۸۶	۰٫۹۹۷۶	۱۴٫۳۰۰۷
۵	۰٫۰۸۷۲	۰٫۰۸۷۵	۸۵	۰٫۹۹۶۲	۱۱٫۴۳۰۱
۶	۰٫۱۰۴۵	۰٫۱۰۵۱	۸۴	۰٫۹۹۴۵	۹٫۵۱۴۳
۷	۰٫۱۲۱۹	۰٫۱۲۲۸	۸۳	۰٫۹۹۲۵	۸٫۱۴۴۳
۸	۰٫۱۳۹۲	۰٫۱۴۰۵	۸۲	۰٫۹۹۰۳	۷٫۱۱۵۴
۹	۰٫۱۵۶۴	۰٫۱۵۸۴	۸۱	۰٫۹۸۷۷	۶٫۳۱۳۸
۱۰	۰٫۱۷۳۶	۰٫۱۷۶۳	۸۰	۰٫۹۸۴۸	۵٫۶۷۱۳
۱۱	۰٫۱۹۰۸	۰٫۱۹۴۴	۷۹	۰٫۹۸۱۶	۵٫۱۴۴۶
۱۲	۰٫۲۰۷۹	۰٫۲۱۲۶	۷۸	۰٫۹۷۸۱	۴٫۷۰۴۶
۱۳	۰٫۲۲۵۰	۰٫۲۳۰۹	۷۷	۰٫۹۷۴۴	۴٫۳۳۱۵
۱۴	۰٫۲۴۱۹	۰٫۲۴۹۳	۷۶	۰٫۹۷۰۳	۴٫۰۱۰۸
۱۵	۰٫۲۵۸۸	۰٫۲۶۷۹	۷۵	۰٫۹۶۵۹	۳٫۷۳۲۱
۱۶	۰٫۲۷۵۶	۰٫۲۸۶۷	۷۴	۰٫۹۶۱۳	۳٫۴۸۷۴
۱۷	۰٫۲۹۲۴	۰٫۳۰۵۷	۷۳	۰٫۹۵۶۳	۳٫۲۷۰۹
۱۸	۰٫۳۰۹۰	۰٫۳۲۴۹	۷۲	۰٫۹۵۱۱	۳٫۰۷۷۷
۱۹	۰٫۳۲۵۶	۰٫۳۴۴۳	۷۱	۰٫۹۴۵۵	۲٫۹۰۴۲
۲۰	۰٫۳۴۲۰	۰٫۳۶۴۰	۷۰	۰٫۹۳۹۷	۲٫۷۴۷۵
۲۱	۰٫۳۵۸۴	۰٫۳۸۳۹	۶۹	۰٫۹۳۳۶	۲٫۶۰۵۱
۲۲	۰٫۳۷۴۶	۰٫۴۰۴۰	۶۸	۰٫۹۲۷۲	۲٫۴۷۵۱
۲۳	۰٫۳۹۰۷	۰٫۴۲۴۵	۶۷	۰٫۹۲۰۵	۲٫۳۵۵۹
۲۴	۰٫۴۰۶۷	۰٫۴۴۵۲	۶۶	۰٫۹۱۳۵	۲٫۲۴۶۰
۲۵	۰٫۴۲۲۶	۰٫۴۶۶۳	۶۵	۰٫۹۰۶۳	۲٫۱۴۴۵
۲۶	۰٫۴۳۸۴	۰٫۴۸۷۷	۶۴	۰٫۸۹۸۸	۲٫۰۵۰۳
۲۷	۰٫۴۵۴۰	۰٫۵۰۹۵	۶۳	۰٫۸۹۱۰	۱٫۹۶۲۶
۲۸	۰٫۴۶۹۵	۰٫۵۳۱۷	۶۲	۰٫۸۸۲۹	۱٫۸۸۰۷
۲۹	۰٫۴۸۴۸	۰٫۵۵۴۳	۶۱	۰٫۸۷۴۶	۱٫۸۰۴۰
۳۰	۰٫۵۰۰۰	۰٫۵۷۷۴	۶۰	۰٫۸۶۶۰	۱٫۷۳۲۱
۳۱	۰٫۵۱۵۰	۰٫۶۰۰۹	۵۹	۰٫۸۵۷۲	۱٫۶۶۴۳
۳۲	۰٫۵۲۹۹	۰٫۶۲۴۹	۵۸	۰٫۸۴۸۰	۱٫۶۰۰۳
۳۳	۰٫۵۴۴۶	۰٫۶۴۹۴	۵۷	۰٫۸۳۸۷	۱٫۵۳۹۹
۳۴	۰٫۵۵۹۲	۰٫۶۷۴۵	۵۶	۰٫۸۲۹۰	۱٫۴۸۲۶
۳۵	۰٫۵۷۳۶	۰٫۷۰۰۲	۵۵	۰٫۸۱۹۲	۱٫۴۲۸۱
۳۶	۰٫۵۸۷۸	۰٫۷۲۶۵	۵۴	۰٫۸۰۹۰	۱٫۳۷۶۴
۳۷	۰٫۶۰۱۸	۰٫۷۵۳۶	۵۳	۰٫۷۹۸۶	۱٫۳۲۷۰
۳۸	۰٫۶۱۵۷	۰٫۷۸۱۳	۵۲	۰٫۷۸۸۰	۱٫۲۷۹۹
۳۹	۰٫۶۲۹۳	۰٫۸۰۹۸	۵۱	۰٫۷۷۷۱	۱٫۲۳۴۹
۴۰	۰٫۶۴۲۸	۰٫۸۳۹۱	۵۰	۰٫۷۶۶۰	۱٫۱۹۱۸
۴۱	۰٫۶۵۶۱	۰٫۸۶۹۳	۴۹	۰٫۷۵۴۷	۱٫۱۵۰۴
۴۲	۰٫۶۶۹۱	۰٫۹۰۰۴	۴۸	۰٫۷۴۳۱	۱٫۱۱۰۶
۴۳	۰٫۶۸۲۰	۰٫۹۳۲۵	۴۷	۰٫۷۳۱۴	۱٫۰۷۲۴
۴۴	۰٫۶۹۴۷	۰٫۹۶۵۷	۴۶	۰٫۷۱۹۳	۱٫۰۳۵۵
۴۵	۰٫۷۰۷۱	۱٫۰۰۰۰	۴۵	۰٫۷۰۷۱	۱٫۰۰۰۰

اشبو لوح عبارتدر سینوسلر
و تانژانتلرك صفر درجه‌دن تا نود درجه‌یه
قدر در صورتیکه نصف قطر
بر واحد فرض کبی
صحح

۱۷۵